I－9

弾性・円形 Disc のグリーンテンソルについて

東海大学海洋学部　正員　北原道弘

1. はじめに　場の微分方程式を境界上の積分方程式に変換し，数値的に解く方法は境界積分方程式法，あるいは，境界要素法と呼ばれ，多くの工学上の問題に応用されている。境界上の積分方程式を解析的に解くことは一般には不可能であるが，簡単な形状（例えば，円形）を有する問題に対しては解析解を得ることができる。ここでは，円形領域に対する積分方程式を解析的に積分することにより，境界条件を満足するグリーンテンソルを時間的に調和な内部点波源について求めたので報告する。なお，2次元平面ひずみを仮定する。

2. 一重層及び二重層ポテンシャルの積分　まず，内部点波源がない場合について，2次元動弾性問題に対する一重層ポテンシャル

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{S}\boldsymbol{\varphi})(\boldsymbol{X}) = \int_{\partial D} \mathbb{U}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{y};\omega)\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})\,dS_y \qquad (1)$$

を円形境界上（図-1参照）で積分することを考える。ここに，基本解 $\mathbb{U}$ の定義及びその表現は次のようになる。

$$\mathbf{P}\left(\tfrac{\partial}{\partial x}\right)\mathbb{U} = \rho\left[c_T^2\Delta\mathbf{1} + (c_L^2-c_T^2)\nabla\nabla + \omega^2\mathbf{1}\right]\mathbb{U} = -\mathbf{1}\delta \qquad (2)$$

$$\mathbb{U}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y};\omega) = \frac{i}{4\mu}\left[H_0^{(1)}(k_TR)\mathbf{1} + \frac{1}{k_T^2}\nabla\nabla\{H_0^{(1)}(k_TR)-H_0^{(1)}(k_LR)\}\right] \quad (R=|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}|) \qquad (3)$$

一重層ポテンシャルの積分には場の点 $\boldsymbol{X}$ に関するフーリエ変換を用いるのが便利であり[1]，(1)式のフーリエ変換は次のようになる。

$$\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{\xi}) = -\mathbf{P}^{-1}(i\boldsymbol{\xi})\int_{\partial D} e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{y}}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})\,dS_y \qquad (4)$$

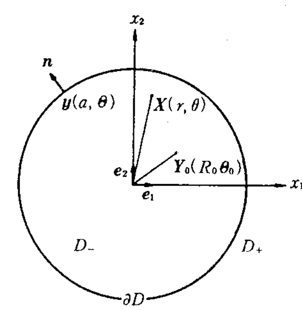

図-1 点波源の作用点 $(\boldsymbol{Y}_0)$，Source点 $(\boldsymbol{y})$ と Field点 $(\boldsymbol{X})$

密度 $\boldsymbol{\varphi}$ を境界上のフーリエ級数に展開し $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\varphi}^n e^{in\theta}$，(4)式の積分を行なうと次のようになる。

$$\int_{\partial D} e^{-i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{y}}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})\,dS_y = 2\pi a\sum_n(-i)^n J_n(\xi a)\,e^{in\theta_0}\boldsymbol{\varphi}^n \qquad (\boldsymbol{\xi}=(\xi,\theta_0)) \qquad (5)$$

また，(4)式の $-\mathbf{P}^{-1}(i\boldsymbol{\xi})$ は次のように書ける。

$$-\mathbf{P}^{-1}(i\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\mu}\left\{\frac{1}{\xi^2-k_T^2} - \frac{\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}}{k_T^2}\left(\frac{1}{\xi^2-k_T^2}-\frac{1}{\xi^2-k_L^2}\right)\right\} \qquad (k_T, k_L \text{は横波，縦波の波数}) \qquad (6)$$

(5)，(6)式を(4)式に代入し，逆変換を実行すると一重層ポテンシャルによる変位場を得る（$r\le a$ の場合）。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}) = \frac{a\pi i}{8\mu}\sum_n\Big[&\Big\{\big(J_{n+1}(k_Tr)H_{n-1}^{(1)}(k_Ta)-\beta J_{n+1}(k_Lr)H_{n-1}^{(1)}(k_La)\big)\Phi^n\\ &+\big(J_{n+1}(k_Tr)H_{n+1}^{(1)}(k_Ta)+\beta J_{n+1}(k_Lr)H_{n+1}^{(1)}(k_La)\big)\bar{\Phi}^n\Big\}\boldsymbol{V}\\ &+\Big\{\big(J_{n-1}(k_Tr)H_{n-1}^{(1)}(k_Ta)+\beta J_{n-1}(k_Lr)H_{n-1}^{(1)}(k_La)\big)\Phi^n\\ &+\big(J_{n-1}(k_Tr)H_{n+1}^{(1)}(k_Ta)-\beta J_{n-1}(k_Lr)H_{n+1}^{(1)}(k_La)\big)\bar{\Phi}^n\Big\}\bar{\boldsymbol{V}}\Big]e^{in\theta}\end{aligned} \qquad \left(\beta=\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\right) \qquad (7)$$

ここに，$\boldsymbol{V}$，$\bar{\boldsymbol{V}}$ は基底ベクトル $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{e}_r-i\boldsymbol{e}_\theta$，$\bar{\boldsymbol{V}}=\boldsymbol{e}_r+i\boldsymbol{e}_\theta$ であり，Φ^n，$\bar{\Phi}^n$ はこの基底に関する密度の成分である。変位を $\boldsymbol{u}=u^V\boldsymbol{V}+u^{\bar{V}}\bar{\boldsymbol{V}}$ と書いて，上式をマトリックス表示すると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix}u^V\\ u^{\bar{V}}\end{Bmatrix} = \frac{a\pi i}{8\mu}\sum_n\begin{bmatrix}J_{n+1}(k_Tr) & -J_{n+1}(k_Lr)\\ J_{n-1}(k_Tr) & J_{n-1}(k_Lr)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_{n-1}^{(1)}(k_Ta) & H_{n+1}^{(1)}(k_Ta)\\ \beta H_{n-1}^{(1)}(k_La) & -\beta H_{n+1}^{(1)}(k_La)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Phi^n\\ \bar{\Phi}^n\end{Bmatrix}e^{in\theta} \qquad (8)$$

上式を以下の表記の都合上次のように書くことにする。

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}) = \frac{a\pi i}{8\mu}\sum_n M_1^n(J,r)M_2^n(H,a)\Phi^n e^{in\theta} = \sum_n \boldsymbol{S}^n\Phi^n e^{in\theta} \qquad (9)$$

ここに，$\boldsymbol{\Psi}^n=\{\Psi^n, \bar{\Psi}^n\}^T$ であり，$\mathbf{M}_1^n$ と $\mathbf{M}_2^n$ は(8)式の対応するマトリックスである。

二重層ポテンシャルについても同様に積分できて，結果は次のようになる（$r\leq a$ の場合）。

$$\begin{Bmatrix} u^v \\ u^{\bar{v}} \end{Bmatrix} = \frac{a\pi i}{8}\sum_n \begin{bmatrix} J_{n+1}(k_T r) & -J_{n+1}(k_L r) \\ J_{n-1}(k_T r) & J_{n-1}(k_L r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_T H_{n-2}^{(1)}(k_T a) & -k_T H_{n+2}^{(1)}(k_T a) \\ -k_L\{\alpha H_n^{(1)}(k_L a)-\beta H_{n-2}^{(1)}(k_L a)\} & -k_L\{\alpha H_n^{(1)}(k_L a)-\beta H_{n+2}^{(1)}(k_L a)\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi^n \\ \bar{\Psi}^n \end{Bmatrix} e^{in\theta} \tag{10}$$

ここに，$\alpha=1/2(1-\nu)$ である。上記，二重層による変位場を次のように書くことにする。

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \frac{a\pi i}{8}\sum_n \mathbf{M}_1^n(J,r)\mathbf{N}_2^n(H,a)\boldsymbol{\Psi}^n e^{in\theta} = \sum_n \mathbf{D}^n\boldsymbol{\Psi}^n e^{in\theta} \tag{11}$$

3. グリーン公式の解析的表現

円形領域について一重層及び二重層ポテンシャルの解析的表現が得られたので，これらポテンシャルの重ね合わせとしてグリーン公式の解析的表現が得られる。

グリーンの変位公式：

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_{Y_0}(\mathbf{X}) + \frac{a\pi i}{8\mu}\sum_n \mathbf{M}_1^n(J,r)\left[\mathbf{M}_2^n(H,a)\mathbf{t}^n - \mu\,\mathbf{N}_2^n(H,a)\mathbf{u}^n\right]e^{in\theta} & (r\leq a) \quad (12) \\ \mathbf{0} = \mathbf{u}_{Y_0}(\mathbf{X}) + \frac{a\pi i}{8\mu}\sum_n \mathbf{M}_1^n(H,r)\left[\mathbf{M}_2^n(J,a)\mathbf{t}^n - \mu\,\mathbf{N}_2^n(J,a)\mathbf{u}^n\right]e^{in\theta} & (r\geq a) \quad (13) \end{cases}$$

グリーンの応力公式：

$$\begin{cases} \mathbf{t}(\mathbf{X}) = \mathbf{t}_{Y_0}(\mathbf{X}) + \frac{a\pi i}{8}\sum_n \mathbf{N}_1^n(J,r)\left[\mathbf{M}_2^n(H,a)\mathbf{t}^n - \mu\,\mathbf{N}_2^n(H,a)\mathbf{u}^n\right]e^{in\theta} & (r\leq a) \quad (14) \\ \mathbf{0} = \mathbf{t}_{Y_0}(\mathbf{X}) + \frac{a\pi i}{8}\sum_n \mathbf{N}_1^n(H,r)\left[\mathbf{M}_2^n(J,a)\mathbf{t}^n - \mu\,\mathbf{N}_2^n(J,a)\mathbf{u}^n\right]e^{in\theta} & (r\geq a) \quad (15) \end{cases}$$

ここに，$\mathbf{u}_{Y_0}(\mathbf{X})$ 及び $\mathbf{t}_{Y_0}(\mathbf{X})$ は領域内部の任意点 $\mathbf{Y}_0=(R_0,\Theta_0)$ に作用する時間的に調和な点波源より生じた変位及び応力ベクトルである。また，(14)式における $\mathbf{N}_1^n(J,r)$ のマトリックス表現は次のようである。

$$\mathbf{N}_1^n(J,r) = \begin{bmatrix} -k_T J_{n+2}(k_T r) & -k_L\left\{\frac{\alpha}{\beta}J_n(k_L r) - J_{n+2}(k_L r)\right\} \\ k_T J_{n-2}(k_T r) & -k_L\left\{\frac{\alpha}{\beta}J_n(k_L r) - J_{n-2}(k_L r)\right\} \end{bmatrix} \tag{16}$$

4. グリーンテンソルの定式化

上記グリーン公式の解析的表現は場の方程式を満足する陽な解表現の1つであり，円形境界上の境界条件を与えれば境界条件を満足するグリーンテンソルが得られる。いま，内部オ一種（変位）問題に対するグリーンテンソルをグリーンの応力公式より求めてみる。なお，点波源は単位集中力の系 $\mathbf{1}\delta(\mathbf{Y},\mathbf{Y}_0)e^{-i\omega t}$ とし，境界条件は同次（境界上で変位が零）とすると，本問題に対する(15)式のマトリックス表現は次のようになる。

$$\mathbf{0} = \mathbf{T}(\mathbf{X},\mathbf{Y}_0;\omega) + \frac{a\pi i}{8}\sum_n \mathbf{N}_1^n(H,r)\mathbf{M}_2^n(J,a)\boldsymbol{\Xi}^n e^{in\theta} \qquad \mathbf{X}\in D_+\ ,\ \mathbf{Y}_0\in D_- \tag{17}$$

ここに $\mathbf{T}(\mathbf{X},\mathbf{Y}_0;\omega) = \frac{i}{16}\sum_n \mathbf{N}_1^n(H,r)\mathbf{M}_2^n(J,R_0)e^{in(\theta-\Theta_0)}$ である。上式の境界への極限 $\mathbf{X}\to\mathbf{x}^+$ をとれば，各 n について次式を得る。

$$\frac{a\pi i}{8}\mathbf{N}_1^n(H,a)\mathbf{M}_2^n(J,a)\boldsymbol{\Xi}^n e^{in\theta} = -\frac{i}{16}\mathbf{N}_1^n(H,a)\mathbf{M}_2^n(J,R_0)e^{in(\theta-\Theta_0)} \tag{18}$$

よって，$\det[\mathbf{N}_1^n(H,a)\mathbf{M}_2^n(J,a)]\neq 0$ であれば，$\boldsymbol{\Xi}^n$ が次のように求められる。

$$\boldsymbol{\Xi}^n = \frac{-1}{2\pi a}\mathbf{M}_2^n(J,a)^{-1}\mathbf{M}_2^n(J,R_0)e^{-in\Theta_0} \tag{19}$$

この $\boldsymbol{\Xi}^n$ を(12)式の対応する表現に代入すれば，境界条件を満足するグリーンテンソルが得られる。

$$\mathbf{G}_1(\mathbf{X},\mathbf{Y}_0;\omega) = \mathbf{U}(\mathbf{X},\mathbf{Y}_0;\omega) - \frac{i}{16\mu}\sum_n \mathbf{M}_1^n(J,r)\mathbf{M}_1^n(J,a)^{-1}\mathbf{M}_1^n(H,a)\mathbf{M}_2^n(J,R_0)e^{in(\theta-\Theta_0)} \tag{20}$$

5. おわりに

オ二種問題に対するグリーンテンソル及び詳細については当日報告する。

参考文献　1) Kobayashi, S. & Nishimura, N., *Memoirs of the Faculty of Engineering*, Kyoto Univ., Vol. 42, pp. 228～241, 1980.