多項プロビットモデルの適用性に関する研究

名古屋大学工学部　正　員　河上省吾
名古屋大学工学部　正　員　広畠康裕
名古屋大学大学院　学生員　○野口宏一

1. はじめに

非集計選択モデルとして従来から広く用いられてきたロジットモデルは，ある個人によって認識される効用が各選択肢について相互独立に確率分布するという強い仮定をもつ。そのため，ロジットモデルは「赤バス－青バス問題」に代表されるような類似性をもつ選択肢の選択確率を十分に説明することができない。この問題を解決するために，Nestedロジットモデル，多項プロビットモデルなどの研究が進められている。特に多項プロビットモデルは，各選択肢についての効用が共分散をもって多次元正規分布すると仮定するものであり，最も一般的なモデルであるが，選択確率の計算が困難であるためあまり用いられていない。本研究は交通手段選択問題に多項プロビットモデルを適用し，各交通手段の効用関数と手段間の共分散を推定することを目的とするが，ここでは多項プロビットモデルの概要とその選択確率の計算およびモデルのキャリブレーションの方法を中心に紹介する。

2. 多項プロビットモデルの概要

非集計選択モデルは，効用が確率分布すると仮定して効用最大化理論によって選択行動を説明するものである。ある個人が選択肢 i を選択する確率 P_i は次式によって与えられると仮定する。

$$P_i = \mathrm{Prob}\{U_i > \max_{j \neq i}(U_j)\} \qquad (1)$$

ただし，$U_i = V_i + \varepsilon_i$，ここに，$U_i$は選択肢 i の認識される効用，V_iは選択肢 i の観測される効用，ε_iは確率分布する誤差項である。ここでε_iを選択肢相互に独立にGumbel分布に従うと仮定するとロジットモデルとなり，その選択確率は式(1)より次式のように導かれ，その計算は容易である。

$$P_i = \exp V_i \Big/ \left(\sum_{j=1}^{J} \exp V_j\right) \qquad (2)$$

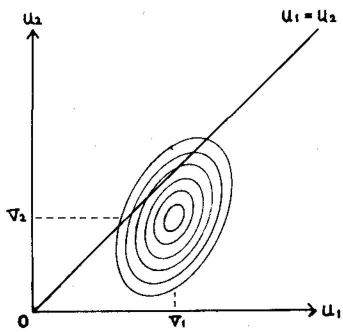

図1　多項プロビットモデル

またε_iを共分散をもつ多次元正規分布に従うと仮定すると多項プロビットモデルとなり，その選択確率は次式のようになる。

$$P_i = \int_{u_1<u_i}\int_{u_2<u_i}\cdots\int_{u_i=-\infty}^{u_i=+\infty}\cdots\int_{u_I<u_i} \phi(\mathbf{u}\mid \mathbf{V}, \Sigma_\varepsilon)\, d\mathbf{u} \qquad (3)$$

ただし，$\mathbf{V} = (V_1, V_2, \cdots, V_i, \cdots, V_I)$，$\Sigma_\varepsilon = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \cdots & \sigma_{1i}^2 & \cdots & \sigma_{1I}^2 \\ \sigma_{12}^2 & \sigma_{22}^2 & \cdots & \sigma_{2i}^2 & \cdots & \sigma_{2I}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{1i}^2 & \sigma_{2i}^2 & \cdots & \sigma_{ii}^2 & \cdots & \sigma_{iI}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{1I}^2 & \sigma_{2I}^2 & \cdots & \sigma_{iI}^2 & \cdots & \sigma_{II}^2 \end{pmatrix}$

ここに，$\phi(\mathbf{u}\mid\mathbf{V},\Sigma_\varepsilon)$は平均ベクトル$\mathbf{V}$と分散共分散行列$\Sigma_\varepsilon$をもつベクトル$\mathbf{U}$の正規確率密度関数である。式(3)において $I = 2$ のとき，すなわち2項プロビットモデルのとき，その選択確率は図1によって説明できる。選択肢1の選択確率は，$u_1 > u_2$となる範囲で確率密度関数を積分した値となる。多次元プロビットモデルにおいては，分散共分散行列Σ_εの共分散が0のとき確率変数は相互独立となり式(3)は容易に計算できるが，一般的に共分散を有するときには確率変数は相互独立とならずその計算は困難である。

この選択確率を計算する手法として，数値積分法，Monte Carlo Simulation，数値近似法の3手法が提案されている。数値積分法は分散共分散行列Σ_εをコレスキー分解により規準化することによって各確率変数を独立にしてから直接数値積分をして選択確率を計算する方法であるが，積分範囲が複雑となるため3次元までの問題にのみ適用可能である。Monte Carlo Simulationは平均ベクトル$\mathbb{V}$と分散共分散行列Σ_εをもつ確率乱数$\mathbb{U}$を先の数値積分法と同様にコレスキー分解により発生させ，その乱数$\mathbb{U}$によって選択確率を求める手法である。数値近似法はClarkの公式を利用して，$\tilde{U} = \max(U_1, U_2, \cdots, U_i, \cdots, U_I)$ の平均と分散を計算し，そこから選択確率を求める方法であり，その計算は非常に容易である。すなわち，多次元正規分布の確率変数$\mathbb{U}$が式(3)の平均ベクトル$\mathbb{V}$と分散共分散行列Σ_εをもつとき，一般的に式(4)で表現されるClarkの公式によって，$\tilde{U}_2 = \max(U_1, U_2) \to \tilde{U}_3 = \max(\tilde{U}_2, U_3) \to \cdots \to \tilde{U}_i = \max(\tilde{U}_{i-1}, U_i) \to \cdots \to \tilde{U}_I = \max(\tilde{U}_{I-1}, U_I)$の平均$\tilde{V}_i$と分散$\tilde{\sigma}_{ii}^2$および共分散$\tilde{\sigma}_{ij}^2$を順次計算することができる。

$$\tilde{V}_i = V_i + (\tilde{V}_{i-1} - V_i)\Phi(\alpha_i) + a_i\phi(\alpha_i),\ \tilde{\sigma}_{ii}^2 = \tilde{\tilde{V}}_i - \tilde{V}_i^2,\ \tilde{\sigma}_{ij}^2 = \sigma_{ij}^2 + (\tilde{\sigma}_{i-1,j}^2 - \sigma_{ij}^2)\Phi(\alpha_i) \tag{4}$$

ただし，$a_i = (\tilde{\sigma}_{i-1,i-1}^2 + \sigma_{ii}^2 - 2\tilde{\sigma}_{i-1,i}^2)^{\frac{1}{2}}$，$\alpha_i = (\tilde{V}_{i-1} - V_i)/a_i$

$$\tilde{\tilde{V}}_i = V_i^2 + \sigma_{ii}^2 + (\tilde{V}_{i-1}^2 + \tilde{\sigma}_{i-1,i-1}^2 - V_i - \sigma_{ii}^2)\Phi(\alpha_i) + (\tilde{V}_{i-1} + V_i)a_i\phi(\alpha_i)$$

3. モデルのキャリブレーション

観測される効用$\mathbb{V}$と分散共分散行列Σ_εに含まれる各パラメータを推定するためのキャリブレーションの方法を図2に示す。各パラメータは最尤推定法により次式の尤度関数L，あるいは対数尤度関数L^*を最大化するように推定される。

$$L = \prod_{j=1}^{J}\prod_{i=1}^{I} P_{ij}^{\delta_{ij}} \tag{5}$$

$$L^* = \ln L = \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} \delta_{ij} P_{ij} \tag{6}$$

ここに，P_{ij}は個人jが選択肢iを選択する確率であり，個人jが選択肢iを選択した場合$\delta_{ij} = 1$，他の場合$\delta_{ij} = 0$とする。

尤度関数の最大化は，Newton-Raphson法やDavidon-Fletcher-Powell法などによって最大化問題を解くわけであるが，このとき選択確率P_iに対するパラメータθ_jについての勾配$\partial P_i/\partial\theta_j$を計算する必要がある。勾配は数値微分によって計算できるが，確率変数U_jの平均V_jについての勾配$\partial P_i/\partial V_j$は式(3)を$-U_j$について偏微分するのと同じであり，すなわち式(3)の積分を1次元低下させるだけでよい。これがMcFaddenの提案したShortcut法である。

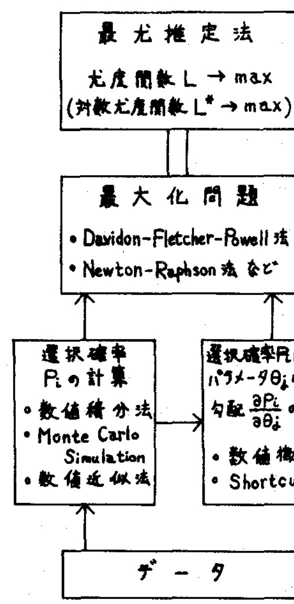

図2　モデルのキャリブレーション

4. モデルの適用

本モデルを交通手段選択問題に適用することによって，各手段の効用関数を求め，また手段間の共分散を明らかにする。選択肢としては，鉄道・バス・自動車などが考えられるが，ともに公共輸送機関である鉄道とバスの類似性を多次元正規分布を仮定する多項プロビットモデルを用いることによって確認することが可能となる。また代表交通手段にアクセス手段を加えた複合交通手段を選択肢に入れることも可能となり，これら相互間の類似性を調べることができる。分析の結果は発表当日に述べる。

（参考文献）Carlos Daganzo "Multinomial Probit (The Theory and Its Application to Demand Forecasting)" 1979