IV—6

高次モデルによる信号交差点交通流の解析

信州大学工学部　正員　奥谷　巌
信州大学工学部　学生員　○十松昭英

1．はじめに

交通制御問題を考える上で、交通の流れを現実に即して再現するようなモデルが有効な解析手段となる。交通流をあらわすモデルとして従来まで用いられてきたモデルは衝撃波理論であるが、その理論は車の速度の周囲の交通状況に呼応した動的な変化をまったく考慮しない構造となっている。
従って本研究ではそのような要素を導入しうる高次交通モデルをとりあげ、その適用性について数値解析的な方法を使用して検討するものである。数値解析法としては、近年、構造力学、水理学において有効とみなされている有限要素法を用いた。

2．交通流の基礎微分方程式

交通路軸に沿ってX座標を導入し、微小区間 dx に着目する。区間 dx の左右端から単位時間に流入する交通量を q, $q+(\partial q/\partial x)dx$ とし、この区間の単位長さ当たりに発生する交通量を単位時間当たりQ、密度の時間変化を $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ とすると次の連続の式が得られる。 $\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=Q$ (1)
ここで我々はX座標の原点を道路下流にとり、発生交通量 $Q=0$ の場合について考える。また車の速度を u とすると上の方程式は次のように変換される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}-\frac{\partial(\rho\cdot u)}{\partial x}=0 \tag{2}$$

一方、運動方程式として、Payne[1)]の提案する次式を用いる。

$$\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\nu}{T}\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{1}{T}(u-u_e(\rho))=0 \tag{3}$$

ここに、$u_e(\rho)=u_f(1-\frac{\rho}{\rho_j})$、$\nu=-\frac{1}{2}u_e'(\rho)$

式中、T は運転車の反応時間、u_f は最大速度、ρ_j は最大交通密度である。

3．FEMによる離散化

本研究においては、空間変数に対して重み付き残差法の一種であるGalerkin有限要素法を用いて離散化を行ない、時間変数に対しては、差分法の一つであり安定性の強い 2-Step Lax wendroff法を用いた。なお式(3)の離散化において両辺に ρ をかけたことを明記しておく。

(1) 空間変数の離散化

交通路を細分割し、その要素節点を下流から1, 2 … n と定め、その1要素 $i, i+1$ について考える。
$i, i+1$ 区間の任意点における密度 $\rho(x)$ は図-1の点線で表わされる形状関数

$$N_i=(x_{i+1}-x)/(x_{i+1}-x_i) \tag{4}$$

$$N_{i+1}=(x_i-x)/(x_i-x_{i+1}) \tag{5}$$

と、$i, i+1$ 点における密度 ρ_i, ρ_{i+1} によって決められる。

$$\rho(x)=\rho_i\cdot N_i+\rho_{i+1}\cdot N_{i+1} \tag{6}$$

同様に速度に関しても u_i, u_{i+1} を与え、$u(x)$ が決められる。

$$u(x)=u_i\cdot N_i+u_{i+1}\cdot N_{i+1} \tag{7}$$

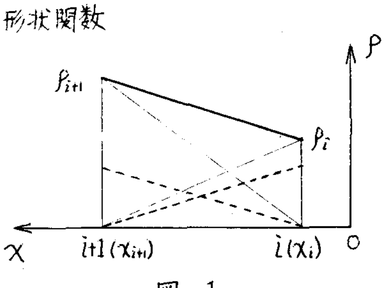


図-1

式(2). (3)に式(6),(7)を代入し、重み関数N_m（mは$i, i+1$点において、それぞれ $i, i+1$ をとる.）を用いてGalerkin法を適用すれば次式がえられる。

$$\begin{bmatrix} 2L_i & L_i \\ L_i & 2L_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\rho}_i \\ \dot{\rho}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\rho_{i+1}u_{i+1} - 4\rho_i u_i + \rho_i u_{i+1} + \rho_{i+1} u_i \\ 4\rho_{i+1}u_{i+1} - 2\rho_i u_i - \rho_i u_{i+1} - \rho_{i+1} u_i \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} (3\rho_i+\rho_{i+1})L_i & (\rho_i+\rho_{i+1})L_i \\ (\rho_i+\rho_{i+1})L_i & (\rho_i+3\rho_{i+1})L_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{i+1}u_{i+1}^2 - 3\rho_i u_i^2 + 2\rho_i u_i u_{i+1} + \rho_i u_{i+1}^2 - \rho_{i+1}u_i^2 + \frac{6\nu}{T}(\rho_{i+1}-\rho_i) \\ -\frac{L_i}{T}(3\rho_i u_i + \rho_i u_{i+1} + \rho_{i+1}u_i + \rho_{i+1}u_{i+1}) + \frac{2L_i u_f}{T}(2\rho_i+\rho_{i+1}) - \frac{L_i u_f}{T\rho_J}(3\rho_i^2 + 2\rho_i\rho_{i+1} + \rho_{i+1}^2) \\ 3\rho_{i+1}u_{i+1}^2 - \rho_i u_i^2 - 2\rho_{i+1}u_i u_{i+1} + \rho_i u_{i+1} - \rho_{i+1}u_i + \frac{6\nu}{T}(\rho_{i+1}-\rho_i) \\ -\frac{L_i}{T}(3\rho_{i+1}u_{i+1} + \rho_i u_i + \rho_i u_{i+1} + \rho_{i+1}u_i) + \frac{2L_i u_f}{T}(\rho_i+2\rho_{i+1}) - \frac{L_i u_f}{T\rho_J}(\rho_i^2 + 2\rho_i\rho_{i+1} + 3\rho_{i+1}^2) \end{bmatrix} \tag{9}$$

ここにL_iは要素長$x_{i+1}-x_i$ 、 ・は時間微分を意味する。

式(8).(9)を全要素について求め、これらを重ね合わせば、空間変数に対する全体方程式が得られることになる。

(2)、時間変数の離散化

式(8).(9)の重ね合わせによって得られた全体方程式の左辺マトリックスを$\mathbb{M}$，$\rho_i, \rho_{i+1}, u_i, u_{i+1}$の未知量ベクトルを$\mathbb{V}$、右辺を$\mathbb{F}$とおき、時刻$t$において考えると次の関係が得られる。

$$\mathbb{M}_t \cdot \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{V}_t = \mathbb{F}_t \tag{10}$$

ここで2−Step Lax-wendroff式を適用する。その第1ステップ式は

$$\mathbb{V}_{t+\frac{\Delta t}{2}} = \mathbb{V}_t + \frac{\Delta t}{2} \cdot \mathbb{M}_t^{-1} \cdot \mathbb{F}_t \tag{11}$$

であり、またその第2ステップ式は

$$\mathbb{V}_{t+\Delta t} = \mathbb{V}_t + \Delta t \cdot \mathbb{M}_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{-1} \cdot \mathbb{F}_{t+\frac{\Delta t}{2}} \tag{12}$$

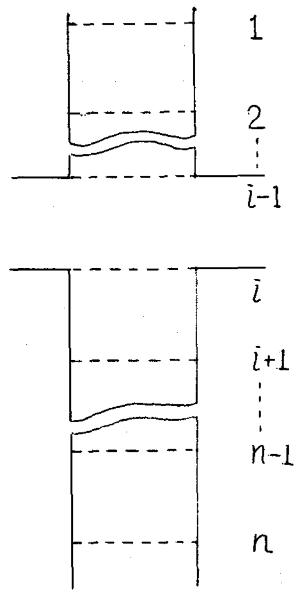
である。ここに添字t, $t+\Delta t$などは時刻を示す。式(12)を与えられた初期条件、境界条件のもとにStep-by-Stepに解けばすべての時刻における未知量は決定でき方程式は解けたことになる。

4、信号交差点への応用

本研究は1ルート系の交通流解析をおこなう。今、図−2に示す通り道路を細分割し、その要素節点を下流側より1.2.…i…nと示し、節点iを信号停止線とする。上流の節点nにおいては流入してくる車の速度、密度をStepごとに与える。青信号時においては節点1に高速度、低密度の境界条件を適用し、赤信号時においては節点iの速度を$u_i=0$とした境界条件を適用する。その場合iより下流の解析はおこなわない。

これらの条件の下で、待ち行列長，待ち行列台数、遅れ時間、停止線からの流出量などを計算し、8ミリ撮影による実際の値と比較検討する。

結果については講演当日発表する予定である。



図−2

（参考文献）J.Jコナー＆C.Aブレビア「流体解析への有限要素法の応用」
1) Payne, H.J.,"Models of Freeway Traffic and Control."