合流部の流れの数値計算法

信州大学工学部 正員 冨所 五郎
信州大学大学院 学生員 ○吉田 宏司

1. はじめに ・・・ 本研究は開水路合流部における流れ特性について、FEMを用いて数値計算をするものであり、その精度を調べるため水理実験結果との比較と若干の考察を行なった。数値計算は任意の初期値から出発し、定常となる解を求めた。すなわち、定常問題を非定常解析の収束値として解析した。また、境界条件の過多から生ずると思われる場所的な解の振動に対して、境界条件の変更や三角フィルターの作用によって、計算時間の短縮と十分な精度の収束解を得た。

2. 基礎方程式 ・・ FEMにより三次元解析を行なう場合、相当な計算時間と容量を要する。このため鉛直方向の流速は一定とし、合流部付近では二次元解析、それ以外の所では流れに直角方向の流速は0とした一次元解析を行なった。水平二次元不定流の基礎式は $\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial uh}{\partial x}+\frac{\partial vh}{\partial y}=0$ (1)
$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial h}{\partial x}=g(I_x-S_x)+A_H\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ (2) $\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial h}{\partial y}=g(I_y-S_y)+A_H\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$ (3)
である[1]。ここに、u, v は x, y 方向の平均流速、h は水深、I は水路勾配、S は摩擦による勾配、A_H は水平渦動粘性係数である。また、v に関する項を削除すれば、一次元不定流の基礎式となる。

3. 数値計算法 ・・ 式(1)~(3)の離散化において、空間変数に対してガラーキンFEM、時間変数に対して差分法の一種であるTwo Step Lax-Wendroff 法を用い、定常問題を非定常解析の収束値として解析した。また、式(2)や式(3)のSはマニングの粗度係数nと流速ベクトル$\mathbf{u}$と径深Rを用いて $S=n^2\mathbf{u}|\mathbf{u}|/R^{\frac{4}{3}}$ とし、壁面摩擦は壁面を有する要素のみに作用させた。さらに、壁面における境界条件を$v=0$のみとし、スリップ速度を認め、これに伴なう合流部端点での流量損失の補正も行なった。また、一次元要素と二次元要素の併用に伴なう問題も解決した。その上、質量行列の逆行列を求める際には直接逆行列を求めずにすむ、行列の集中化を採用した。これらの手法により大幅な計算時間の短縮と容量の節約を成し得た。しかし、得られた解には場所的な振動が現われ、最終的に収束しなかった。そこで原因究明のため問題を簡単化し、一次元解析で試行を繰り返した。解析例は、勾配 1/1000 ,粗度0.0136,幅50cm,流量25 ℓ/sであり、下流($X=0$m)の境界条件として限界水深を与え、低下背水曲線を求めた。その結果、過多の境界条件が原因であると、ほぼ決論付けられた。

4. 境界値の変更 ・ 一次元解析の場合、下流の流速と水深が決まれば上流の流れ特性は決まるが、本解析方法で計算した場合、発散した。これは流入量が一定とならないためで、次に上流の流速と水深も拘束したが場所的な振動が現われた。この原因は上流の境界値に無理があるためと考えられ、そこで、上流の流入量を境界条件とし、水深と流速の変数をこの流量を満たす範囲内で自由に変動できるようにした。その結果、振動量も少なくなり収束した。さらに、三角フィルターなるものを

作用させることによって、振動も解消しなめらかな解を得た。三角フィルターとは、第k節点の変数値をV_kとし、三角フィルター作用後の値に $'$ を付けると $V_1' = V_1$,

$$V_k' = (V_{k-1} + 2V_k + V_{k+1})/4 \quad (2 < k < N-1)$$

$$V_N' = (V_{N-1} + V_N)/2$$

である。ここに、Nは全節点数で、V_1は下流境界値、V_Nは上流境界値である。実際の計算では、流速変化より水深変化の方が大きいため、$h_N' = (h_{N-1} + h_N)/2$, $v_N' = v_1 \cdot h_1 / h_N'$ とした。図1は一次元解析例における上流境界(X=10m)の境界値変更の様子である。境界値の変更と三角フィルターは5秒(100 step)ごとに作用させてあり、次の境界値が自動的に決定されて収束して行くのがわかる。この作用の結果、収束時間は2/3 となった。

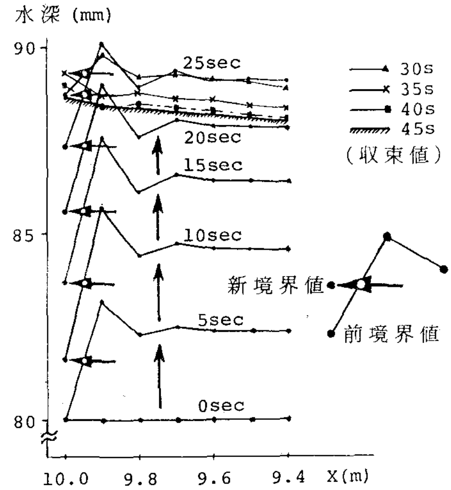

図1　境界値の変遷

5. 合流部解析

・解析例は幅30cm全長5mの支水路が、30度の角度で、幅50cm全長13mの主水路の中央に合流するもので、総流量16 ℓ/s である。3や4の方法を用いて合流部の解析を行なったが、二次元領域に作用する適当なフィルターを見い出せず、今回は一次元領域のみとした。この数値解の精度を調べるため実験値と比較した。図2は実験値で図3は数値解である。両者は良く一致しているといえる。全体でも100の測点平均で、水深3.6%，流速6.3%の誤差は、測定誤差なども考え合わせると、十分な精度といえる。なお、計算時間は日立のM-200Hで13分を要した。

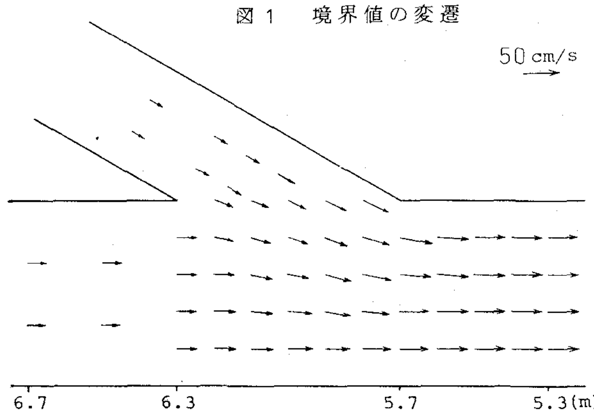

図2　合流部の流速分布（実験値）

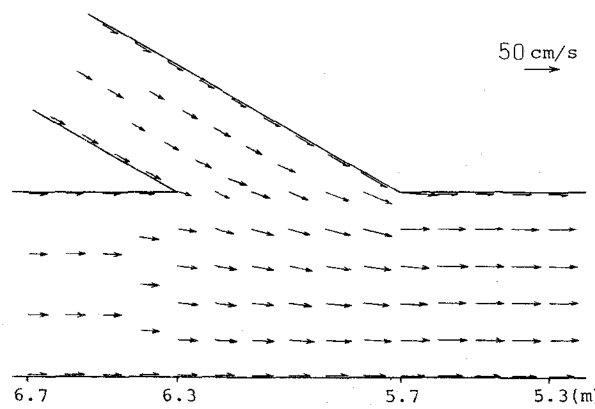

図3　合流部の流速分布（数値解）

6. まとめ

・・・以上の結果は、今後、河川計画や拡散問題に十分適用できると思われる。しかし、詳細な流速分布の測定によると、一次元解析領域においてさえも、水平分布はもとより顕著な鉛直分布が現われている。よって、2での仮定は満足されているとはいえず、今後、二次元領域に適用できるフィルターの開発とともに、三次元解析を推進したいと思う。

参考文献：(1)荒木・富所・高木「FEMによる合流部の段波解析について」土木学会中部支部(1979)