II―36

2変数ＭＥＰ分布の算定とその特性について

信州大学工学部　正　員　荒木正夫
信州大学工学部　正　員　寒川典昭
信州大学大学院　学生員○寺島　彰
信州大学工学部　学生員　佐藤健次

1．はじめに

我々は[1]、今まで最大エントロピー原理（以下ＭＥＰと記す）から確率密度関数を決定する方法を議論し，降水頻度分析を対象としてその妥当性を検討してきた。ところで，複数個の水文量を同時に考えなければならない水工計画などでは，多変数分布が要求される。本報では，この基礎となる２変数分布にＭＥＰを導入し，確率密度関数を決定しその特性について検討する。

2．２変数ＭＥＰ分布の算定

得られる情報は次の任意次数までのモーメントである。

$$\int_0^\infty\int_0^\infty p(x,y)\,dxdy = 1 \qquad \ldots(2.1)$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty x^a p(x,y)\,dxdy = {}_a\mu_x \qquad a=1,2,..Na \qquad \ldots(2.2)$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty y^b p(x,y)\,dxdy = {}_b\mu_y \qquad b=1,2,..Nb \qquad \ldots(2.3)$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty x^c y^d p(x,y)\,dxdy = {}_{cd}\mu_{xy} \qquad c=1,2,..Nc,\ d=1,2,..Nd \qquad \ldots(2.4)$$

これを制約条件として，次の相互エントロピーを最大化する分布を求めることは，自然現象の説明において妥当な立場と考える。

$$H(X,Y) = -\int_0^\infty\int_0^\infty p(x,y)\ \ln p(x,y)\,dxdy \qquad \ldots(2.5)$$

そこで，この問題をラグランジュの未定乗数法で解くと，Ｐ（ｘ，ｙ）の推定値は，

$$\hat{p}(x,y) = \exp(-\alpha - \sum_{a=1}^{Na}\beta_a x^a - \sum_{b=1}^{Nb}\gamma_b y^b - \sum_{c=1}^{Nc}\sum_{d=1}^{Nd}\delta_{cd}x^c y^d) \qquad \ldots(2.6)$$

となる，$\alpha, \beta_a, \gamma_b, \delta_{cd}$ はラグランジュ乗数であり，以下のように評価する。

$\beta_a, \gamma_b, \delta_{cd}$ の近似値を，$\beta_a^0, \gamma_b^0, \delta_{cd}^0$ ，残差を，$\varepsilon_a^\beta, \varepsilon_b^\gamma, \varepsilon_{cd}^\delta$ とおくと，

$$\beta_a = \beta_a^0 + \varepsilon_a^\beta \ ,\quad \gamma_b = \gamma_b^0 + \varepsilon_b^\gamma \ ,\quad \delta_{cd} = \delta_{cd}^0 + \varepsilon_{cd}^\delta \qquad \ldots(2.7)$$

となり，これを(2．2)，(2．3)，(2．4)式に代入し，テーラー展開の１次までの項を採用すれば，次式が得られる。

$$\sum_{a=1}^{Na}(C_{i+a,0}-{}_i\mu_x C_{a,0})\varepsilon_a^\beta+\sum_{b=1}^{Nb}(C_{i,b}-{}_i\mu_x C_{0,b})\varepsilon_b^\gamma+\sum_{c=1}^{Nc}\sum_{d=1}^{Nd}(C_{i+c,d}-{}_i\mu_x C_{c,d})\varepsilon_{cd}^\delta=C_{i,0}-{}_i\mu_x C_{0,0} \qquad i=1,2,..Na \qquad \ldots(2.8)$$

$$\sum_{a=1}^{Na}(C_{a,j}-{}_j\mu_y C_{a,0})\varepsilon_a^\beta+\sum_{b=1}^{Nb}(C_{0,j+b}-{}_j\mu_y C_{0,b})\varepsilon_b^\gamma+\sum_{c=1}^{Nc}\sum_{d=1}^{Nd}(C_{c,j+d}-{}_j\mu_y C_{c,d})\varepsilon_{cd}^\delta=C_{0,j}-{}_j\mu_y C_{0,0} \qquad j=1,2,..Nb \qquad \ldots(2.9)$$

$$\sum_{a=1}^{Na}(C_{k+a,l}-{}_{kl}\mu_{xy} C_{a,0})\varepsilon_a^\beta+\sum_{b=1}^{Nb}(C_{k,l+b}-{}_{kl}\mu_{xy} C_{0,b})\varepsilon_b^\gamma+\sum_{c=1}^{Nc}\sum_{d=1}^{Nd}(C_{k+c,l+d}-{}_{kl}\mu_{xy} C_{c,d})\varepsilon_{cd}^\delta=C_{k,l}-{}_{kl}\mu_{xy} C_{0,0} \qquad k=1,2,..Nc\ ,\ l=1,2,..Nd \qquad \ldots(2.10)$$

ここで，$C_{i,j}$は，

$$C_{i,j} = \int_0^\infty\int_0^\infty x^i y^j \exp(-\sum_{a=1}^{Na}\beta_a^0 x^a - \sum_{b=1}^{Nb}\gamma_b^0 y^b - \sum_{c=1}^{Nc}\sum_{d=1}^{Nd}\delta_{cd}^0 x^c y^d)\,dxdy$$

そこで，上の連立方程式を解き，$\varepsilon_a^{\beta}, \varepsilon_b^{\gamma}, \varepsilon_{cd}^{\delta}$ が十分小さくなるまで，$\beta_a^0, \gamma_b^0, \delta_{cd}^0$ を修正していく。

次に，変数変換，$u = x / {}_1\mu_x$ ，$v = y / {}_1\mu_y$ ，により確率変数を規準化しておく。規準化されたモーメントは，${}_a m_x = {}_a\mu_x / ({}_1\mu_x)^a$ ，${}_b m_y = {}_b\mu_y / ({}_1\mu_y)^b$ ，${}_{cd}m_{xy} = {}_{cd}\mu_{xy} / \{({}_1\mu_x)^c ({}_1\mu_y)^d\}$ となる。

3．2変数ＭＥＰ分布の適合度と特性

母集団分布として，確率密度関数が次式で与えられる２変数ガンマ分布を用いる。

$$p(x,y)=\frac{1}{\Gamma(\nu)(\sigma_1\sigma_2)^{\frac{\nu+1}{2}}(1-\rho)\rho^{\frac{\nu-1}{2}}}\exp\left\{-\frac{x}{\sigma_1(1-\rho)}-\frac{y}{\sigma_2(1-\rho)}\right\}(xy)^{\frac{\nu-1}{2}}I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}\sqrt{\frac{xy}{\sigma_1\sigma_2}}\right) \quad \ldots(3.1)$$

$\nu=4$，$\rho=0.5$ とした２変数ガンマ分布の規準化されたモーメント（表の ν_{pq} ）を用い，ＭＥＰ分布を決定する。ラグランジュ乗数は，表のようになり，これらを（2．6）式に代入すると，ＭＥＰ分布が得られる。ここで，２Ｇ（4，0.5）は(3.1) 式で $\nu=4$，$\rho=0.5$ とした分布であり，２Ｇ（s，t，u，v）はＮa＝s，Ｎb＝t，Ｎc＝u，Ｎd＝v，の２変数ＭＥＰ分布である。図は，理論分布と，このようにして求めたＭＥＰ分布を示しており，モーメントの増加に伴い分布形の適合度の改善の様子がうかがわえる。２Ｇ（4，4，2，2) は母集団分布の傾向をよくとらえている。

表　ラグランジュの乗数とモーメント　　($\nu=4, \rho=0.5$)

	2G(2,2,1,1)	2G(4,4,1,1)	2G(4,4,2,2)	モーメント	
α	2.1283	5.3627	4.5707		
$\beta_1(=\gamma_1)$	-1.8801	-8.3625	-7.2592	$\nu_{10}(\nu_{01})$	1.0
$\beta_2(=\gamma_2)$	2.3276	9.7708	10.475	$\nu_{20}(\nu_{02})$	2.0
$\beta_3(=\gamma_3)$	—	-3.1215	-3.6144	$\nu_{30}(\nu_{03})$	6.0
$\beta_4(=\gamma_4)$	—	0.39584	0.42859	$\nu_{40}(\nu_{04})$	24.0
δ_{11}	-2.6116	-2.3235	-6.3267	ν_{11}	1.2
δ_{12}	—	—	1.0551	ν_{12}	2.8
δ_{21}	—	—	1.0551	ν_{21}	2.8
δ_{22}	—	—	0.22084	ν_{22}	7.36

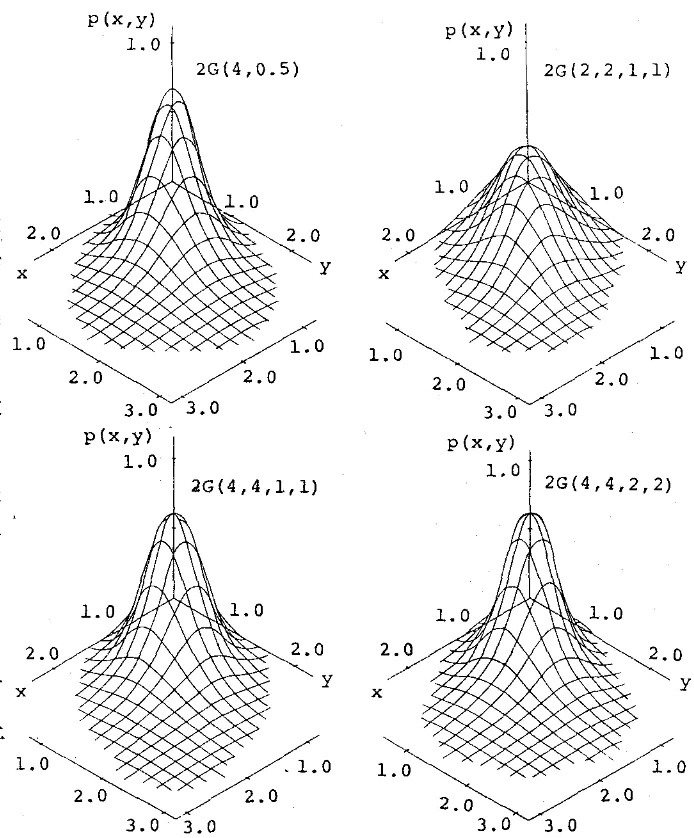

図　MEP分布による適合

4．あとがき

ここでは，$\nu=4$，$\rho=0.5$ の２変数ガンマ分布を母集団として，ＭＥＰ分布を議論したが，他の場合についても同様な結果を得ている。

今後は，モーメントの安定性と２変数ＭＥＰ分布の感度分析を行ない，最もよい適合のモーメントの次数について考察を加えるとともに，実測データへの適用をはかりたいと考えている。

（参考文献）

1）寒川，荒木，甲田：降水頻度分析へのＭＥＰの導入について，第３７回土木学会年次学術講演会講演概要集，昭和５７年１０月。