Ⅱ—33

ＦＥＭとＢＥＭの結合解法による風成流解析法

信州大学工学部　正員　○富所　五郎
愛　媛　県　　　　小澤　尚人

1）まえがき　　　水理の問題を数値的に解く方法として，従来は差分法や有限要素法（ＦＥＭ）などの方法が用いられてきたが，最近支配微分方程式を変換した積分方程式を離散化して解く境界要素法（ＢＥＭ）がＦＥＭとの対比において注目されるようになってきた。この方法は，ＦＥＭや差分法が領域内をメッシュ分割しその節点の未知量を求めるのに対し，解析境界をメッシュ分割するだけでよく未知量数がかなり少なくなり，また入力データも少なく，さらに解析対象が無限遠に広がる場合にも有効であるなどの利点を持つ。その反面，基礎式の係数が場所により変化する場合や非線形性の強い問題には適さないと言われている。そこでＦＥＭとＢＥＭの両方の利点を生かす結合解法が考えられるが，本研究はこの結合解法を浅水域の風成流の三次元解析モデルの一つであるエクマンタイプモデルへの適用を行なうものである。ここでエクマンタイプモデルの支配微分方程式は，水深，風の応力を一定とするとラプラス方程式となり，この水域にＢＥＭを，これ以外の水深変化のある水域にＦＥＭを適用し，両方の連立方程式を組み合せ解いている。

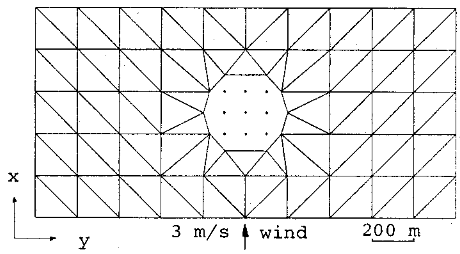
2）浅水域における風成流の基礎式　　　流れを定常とし，慣性項，水平渦動粘性項は他の項に比し小さいとし無視した時の浅水域の風成流の基礎式は[1] $-fv=-1/\rho\cdot\partial p/\partial x+K\cdot\partial^2u/\partial z^2$ ‥(1)，$fu=-1/\rho\cdot\partial p/\partial y+K\cdot\partial^2v/\partial z^2$ ‥(2)，$g=-1/\rho\cdot\partial p/\partial z$ ‥(3)，$\partial u/\partial x+\partial v/\partial y+\partial w/\partial z=0$ ‥(4)，境界条件：水面 $z=\zeta\doteqdot 0.0$ で $K\cdot\partial u/\partial z=\tau_x$，$K\cdot\partial v/\partial z=\tau_y$，水底 $z=-h$ で $u=v=w=0.0$ である。ここに x,y 軸は静水面内にとり，x を東に y を北に正とし，z 軸は鉛直上方を正とし静水面で $z=0.0$ とする。また u，v，w は流速の x,y,z 方向成分，p は圧力，K は鉛直渦動粘性係数，g は重力の加速度，f はコリオリ係数，τ_x,τ_y は風による剪断応力を水の密度で除したものである。上式で鉛直渦動粘性係数を水深方向に一定とすると式(1)，(2)は u，v について解くことができ，得られた式を $-h$ ～ $\zeta\doteqdot 0.0$ で z 方向に積分すると x，y 方向の流量 $\bar{u}\cdot h$，$\bar{v}\cdot h$ が求まる。ここに上つきの(－)は鉛直方向への平均を意味する。これらの流量に $\partial\psi/\partial y=\bar{u}\cdot h$，$\partial\psi/\partial x=-\bar{v}\cdot h$ と流れ関数を導入し，$\partial p/\partial x$，$\partial p/\partial y$ を消去すると $\partial^2\psi/\partial x^2+\partial^2\psi/\partial y^2+(\partial r/\partial x+\partial s/\partial y)/r\cdot\partial\psi/\partial x+(\partial r/\partial x-\partial s/\partial y)/r\cdot\partial\psi/\partial y+t=0$ …(5) となる。ここに r，s は h の，t は h，τ_x，τ_y の関数で（詳しくは文献1)を参照），h，τ_x，τ_y を一定とすると式(5)は $\partial^2\psi/\partial x^2+\partial^2\psi/\partial y^2=0$ …(6) とラプラスの方程式となる。

3）基礎式の離散化とＦＥＭとＢＥＭの結合解法　　　まず式(5)をＦＥＭで離散化するが，ψ，r，… は要素内で線形変化するとし，これらの近似関数を $\psi=\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\psi}$，$r=\mathbf{N}\cdot\mathbf{r}$，… とおく。ここに $\mathbf{N}$ は三角形一次要素の形状関数の行ベクトル，$\boldsymbol{\psi}$，$\mathbf{r}$ は ψ，r の節点値の列ベクトルである。これらを式(5)に代入し，重み関数として $\mathbf{N}^T$ を左よりかけ要素内で積分する。ここで二階の微分項は変形後 Green-Gauss の定理を用い一階に下げる。この時式(5)は，要素が一つしかない時 $\mathbf{K}\boldsymbol{\psi}=\mathbf{K}'\boldsymbol{\psi}+\mathbf{D}$

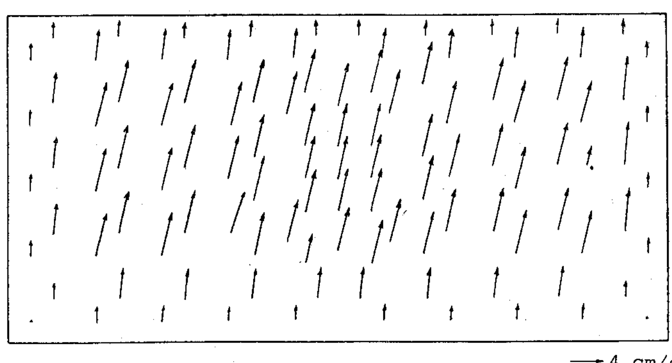
…(7) となる。ここにK'はGreen-Gaussの定理を用い一階に下げた項で $\int_\Gamma N^T \cdot \partial N/\partial n \cdot d\Gamma$ （Γは要素の辺をnはその上に立てた法線），Dは式(5)の最後の項に対する要素内の積分，Kは残りの全ての項に対する要素内の積分である。解析領域が多数の要素より成る時は，式(7)の各項を各要素について求め重ね合せればよいが，得られる式形は式(7)と全く同じである。ただしK'において，領域内部の積分は相隣る要素で消し合うので計算は境界についてのみでよい。つぎに式(7)をBEMの直接法で離散化する。ここでFEMでは三角形一次要素を用いているので，BEMでも線形要素を用いる。この時式(7)は $H\cdot\Psi = G\cdot\Phi$ …(8) となる。この誘導は文献2)を参照されたい。ここにΦは $\partial\psi/\partial n$ の列ベクトルである。さらに式(7),(8)の組み合せであるがこの方法には二つある。一つは，式(7)を $\varphi = N\cdot\Phi = N\cdot\partial\Psi/\partial n$ を用い $K'\cdot\Psi = \int_\Gamma N^T\cdot K'\cdot N\cdot d\Gamma\cdot\Phi + D = M\cdot\Phi + D$ とBEM型の式に変形し，式(8)と組み合せる方法である。もう一つは式(8)を，MG^{-1} を左よりかけ $MG^{-1}H\Psi = MG^{-1}G\Phi = M\Phi = K'\Psi$ とFEM型の式に変形し，式(7)と組合せる方法である。本研究は前者の方法による。

4 数値計算例

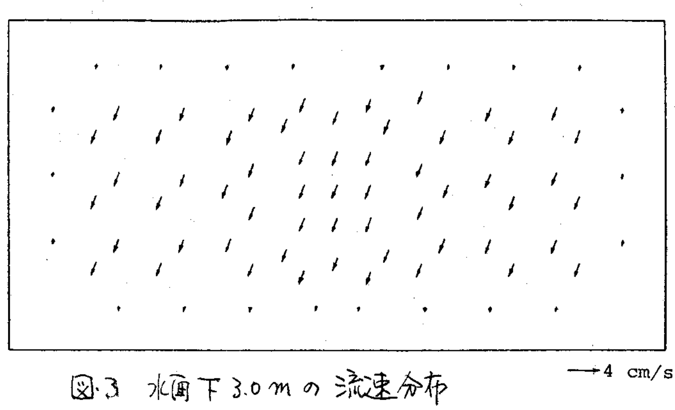
上の方法の解析対象は図・1に示す縦1km，横2kmの矩形湖に風速3m/sの南の一様な風を吹かせる場合である。水深は岸で0.1m，岸より一つ内側の節点まで直線的に5.0mに変化し，それより内側は5.0mの一様水深とした。ψの境界条件は，岸に直角方向の流速を零とすると全ての岸でψ=const.(=0.0)となる。湖には図・1のような有限要素と境界要素メッシュを組んだが，中央の十多角形の辺が境界要素である。数値計算結果として，図・2に表面流速を図・3に水面下3.0mの流速分布を示す。両方の図とも，湖の中央付近の有限要素領域と境界要素領域の流速値は，ほぼ同じ値を示しておりほぼ妥当なものと思える。なお講演時にはもう一つの計算例を示す。



図・1 有限要素メッシュと境界要素メッシュ



図・2 表面流速分布



図・3 水面下3.0mの流速分布

参考文献

1) J. A Liggett and C. Hadjitheodorou ; Circulation in Shallow Homogeneous Lakes, ASCE, HY2, 1969.

2) 例えば C.A.ブラビア，S.ウォーカー著，神谷他訳；境界要素法の基礎と応用，培風館，1981.