

岐阜大学工学部 正会員 安田孝志
 岐阜大学工学部 学生員 ○永田真人

1. 緒言 着者らの研究グループは、不規則性と同時に非線形性が問題となる海岸波浪の力学理論としてソリトンスペクトル理論を展開し、うねり性の海岸波浪へのこの理論の適用性を現地データによって明らかにしてきた¹⁾。ここでは、相互干渉を無視できない海岸波浪に対しても適用できるソリトンスペクトル理論の展開に成功したので、その概要を述べる。

2. 海岸波浪の双一次型基礎方程式の誘導 沿岸海域における暴風波浪は、その非線形性が極度に増大しているため、分散性と平衡しているものと考えられる。したがって、このときの波の伝播を記述する波動方程式として、非回転流体場での基礎方程式からG-M変換によって導かれる次式のk-dV方程式²⁾を用いることは合理的であろう。

$$\eta_t + (\frac{3}{2}\varepsilon)\eta\eta_\xi - (\frac{1}{6})\eta_{\xi\xi\xi} = 0 \tag{1}$$

ここに、 $\eta = \zeta/h$, $\xi = \varepsilon^2(x^* - t^*)$, $\tau = \varepsilon^2 t^*$, $x^* = x/h$, $t^* = t\sqrt{g/h}$, $\varepsilon = (h/L)^2$, h ; 平均水深, ζ ; 平均水面周りの水面変動, t ; 時間, x ; 水平座標, L ; 海岸波浪の代表波の波長, および g ; 重力の加速度である。式(1)を解析的に解く方法としてはGardnerらによって発見された逆散乱法が知られているが、その適用は波高が1ヶ程度の簡単な非線形波動に限られており、非線形性と同時に不規則性が問題となる海岸波浪への適用は容易ではない。このため、ここでは、ソリトンスペクトル理論になじみ易い広田の手法³⁾を用いることにする。

まず、変換 $\eta = P_\xi$ を式(1)に代入すれば、次式を得る。

$$P_\xi + (\frac{3}{4})P_\xi^2 + (\frac{1}{6})P_{\xi\xi\xi} = H \tag{2}$$

ここに、右辺Hは平均海面と波谷面との差 η に依存する積分定数である。ここで、さらに定数 α を媒介とした次式の変換 $p = \alpha(\log F)_\xi - \eta\xi$ を式(2)に適用する。これより、式(2)は次式のように書き換えられる。

$$(\frac{\alpha}{12}F^2)[2F(6F_{\xi\xi} + F_{\xi\xi\xi\xi} - 9\eta F_{\xi\xi}) - 2F_\xi(6F_\xi + F_{\xi\xi\xi} - 9\eta F_\xi) + 3\{(3\alpha - 2\alpha F_{\xi\xi})^2 - 2F_{\xi\xi\xi}F_\xi\} + (\frac{1}{\alpha})\eta^2 F^2] = H \tag{3}$$

ところで、ソリトンスペクトル理論における成分波であるソリトンは次式で表わされる。

$$\eta = A_i \operatorname{sech}^2 \{(\sqrt{3A_i})[\xi - c_i \tau + \delta_i]\} - \eta_0 \tag{4}$$

ここに、 $c_i = A_i^{1/2} - 3^{3/2}/2$, A_i ; ソリトンの固有値, δ_i ; 各ソリトンの波高の座標, および c_i ; \sqrt{gh} の速度で移動する動座標 ξ の各ソリトンの伝播速度である。式(4)を前述の変換とともに式(3)に適用し、式(2)の積分定数Hを $H = (\frac{3}{4})\eta_0^2$ とおけば、式(3)は次式のような双一次形式に書き換えられる。

$$F(6F_{\xi\xi} + F_{\xi\xi\xi\xi} - 9\eta F_{\xi\xi}) - F_\xi(6F_\xi + F_{\xi\xi\xi} - 9\eta F_\xi) + 3(F_{\xi\xi}^2 - F_{\xi\xi\xi}F_\xi) = 0 \tag{5}$$

3. ソリトンスペクトル理論による海岸波浪の表示 ソリトンスペクトル理論では、海岸波浪はソリトンを成分波として表わされるから、ソリトンを成分波とした式(5)、すなわち式(1)の解を求め

れば、ソリトン間の相互干渉を評価した海岸波の表示式が導かれる。いま、対象とする海岸波が \$N\$ 個のソリトンを成分表として持っているとすれば、その波形は次式で表わされる。

$$\eta = \left(\frac{1}{3}\log F\right)_{\xi\xi} - \eta \tag{6}$$

$$F = 1 + \sum_{i=1}^N f_i + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{(B_i - B_j)^2}{(B_i + B_j)} f_i f_j + \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \frac{(B_i - B_j)(B_j - B_k)(B_i - B_k)}{(B_i + B_j)(B_j + B_k)(B_i + B_k)} f_i f_j f_k + \dots + \frac{(B_1 - B_2)(B_2 - B_3) \dots (B_{N-1} - B_N)}{(B_1 + B_2)(B_2 + B_3) \dots (B_{N-1} + B_N)} f_1 f_2 \dots f_N \tag{7}$$

ここに、 $f_i = \exp\{B_i(\xi - C_i\tau + \tilde{\delta}_i)\}$, $B_i = \sqrt{3A_i}$ であり、 $\tilde{\delta}_i$ は相互干渉による位相変化を考慮することにより次式で与えられる。

$$\tilde{\delta}_i = \delta_i + \left(\frac{1}{B_i}\right) \log \left\{ \left(\frac{1}{2f_i}\right) \left[\frac{B_i^2 - 2(\log F)_{\xi\xi}}{(\log F)_{\xi\xi}} + \sqrt{\left(\frac{B_i - 2(\log F)_{\xi\xi}}{(\log F)_{\xi\xi}}\right)^2 - 4} \right] \right\} \tag{8}$$

図1は、2個のソリトンによる相互干渉の過程を示したものであり、図中の実線は式(6)によるものであり、破線は相互干渉を無視した場合のものである。これから、相互干渉の前後における固有値は不変であるが、波峰が重なり合う程度にソリトンが接近した場合には相互干渉が生じ粒子間の衝突によって運動量の輸送が生じるようにソリトン間でエネルギーの輸送が行われていることがわかる。

4. 固有値の計算 相互干渉の著しい場合には、1個の波峰に数個のソリトンが含まれていることもあり得るので、固有値 \$A_i\$ と同時にソリトンの位相 \$\delta_i\$ も未知量とすれば、未知量は \$2N\$ 個となり、解くべき方程式は次式となる。

$$g_i = \eta_i - (\eta_f)_i = 0, \quad i=1, 2, \dots, 2N \tag{9}$$

ここに、 η_f は対象とする海岸波の観測波形であり、 t は観測時間を \$2N\$ 分したときの \$i\$ 番目の位相を示す。式(9)は \$A_i\$ および \$\delta_i\$ に関する非線形連立方程式となるので、Newton-Raphson法を用いて行列演算によって解けばよいことになる。

5. 結語 以上、着者は、非線形性と不規則性が同時に問題となることの複雑さのために、力学理論を基礎とした試みが全くなされてこなかった海岸波に対して、相互干渉が問題となる場合に対しても力学理論であるソリトンスペクトル理論の適用が可能であることを示した。

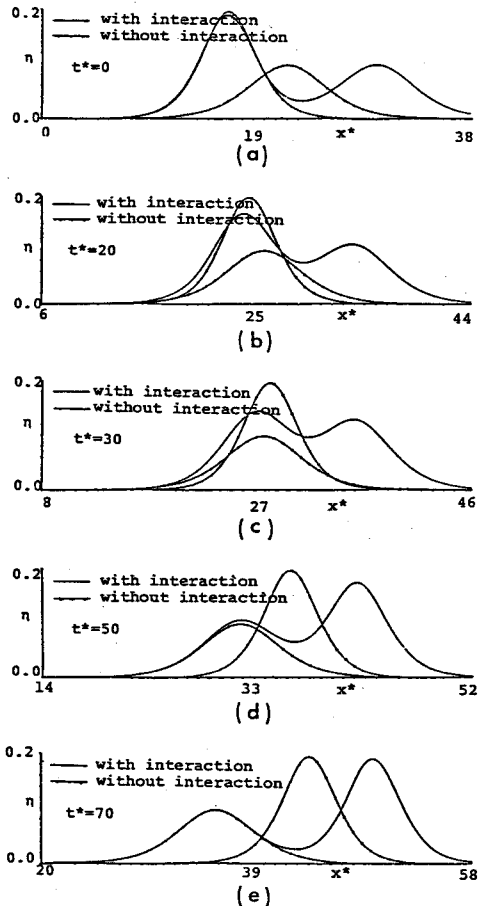


図-1 相互干渉を伴う場合の伝播波形的変化

参考文献

- 1) 工藤 安田・山下・武山; 海岸波のソリトンスペクトル表示, 第29回 海峯論文集, 1982.
- 2) Tsuchiya, Y. and T. Yasuda; A cnoidal wave theory and its verification, 3rd Aust. Conf. on Coastal & Ocean Engg., 1977.
- 3) Hirota, R., Exact solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons, phys. Rev. Lett. 27, 1971.