

表面に線状剛体介在物を有する半無限板の応力解析

名古屋工業大学 学生員 〇竹内 貴司
名古屋工業大学 正 員 長谷部 宣男

1. まえがき 半無限弾性体に線状剛体介在物を有する場合の応力解析を、平面弾性混合境界値問題として行なう。介在物のモデルの他、たとえば、半無限板に剛な板部材が突き抜けているような構造物とも考えられる。剛体介在物のモデルは、介在物の剛さ $=\infty$ という一つの極限である。クラックの場合は、剛さ $=0$ というもう一つの極限である。したがって、一般の応力状態は、その中間に存在する。荷重として、無限遠で一様引張を受ける場合を考える。解法としては、物理領域を単位円内に写像する有理型分数式の和の写像関数と複素応力関数を用いる。そして、応力分布、介在物先端の応力の特異性を示す値（これは、うすい剛体介在物先端の応力の強さを表わす一つの指標となり、クラック先端の応力拡大係数に相等する。）を、剛体介在物の角度、ポアソン比をパラメータとして求める。本報告では、線状剛体介在物が剛体回転を許さない場合の解析を行なう。

2. 解法 図-1に示すような物理領域を単位円内に写像する関数を次式の形に表わす。[1]

$$Z = w(\zeta) = \frac{E_0}{1-\zeta} + \zeta \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_c \quad (1)$$

上式に対して、複素応力関数の一般解は次式になる。[2]

$$\varphi(\zeta) = -\chi(\zeta) \sum \frac{\bar{A}_k B_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} + H(\zeta) \quad (2)$$

$$\psi(\zeta) = -\bar{\varphi}(1/\bar{\zeta}) - \frac{\bar{w}(1/\bar{\zeta})}{w'(\zeta)} \varphi'(\zeta) \quad (\text{ただし、自由境界が存在する場合}) \quad (3)$$

ここで、 $\chi(\zeta)$ はPlemelj関数で、 $(\zeta - \alpha)^m (\zeta - \beta)^{1-m}$, $m = a/5 - i(\ln K)/2\pi$, $\bar{A}_k$ は未定定数、 $B_k = E_k / w'(\zeta_k)$, $\zeta_k = 1/\bar{\zeta}_k$, K はポアソン比を ν とすると、 $K = 3 - 4\nu$ (平面ひずみ), $\kappa = (3 - 4\nu)/(1 + \nu)$ (平面応力), $H(\zeta)$ は境界条件によって決定される関数である。図-1において、 x 軸方向に一様引張力 P が作用し、BCD部分では、 $u = v = 0$, AB, DA部分では、 $P_x = P_y = 0$ という条件の下で $H(\zeta)$ を求めると次式になる。ただし、 u, v はそれぞれ x, y 方向の変位、 P_x, P_y はそれぞれ x, y 方向の外力である。

$$H(\zeta) = M(\zeta) - \frac{\kappa + 1}{2\pi i \kappa} \chi(\zeta) \int_{BCD} \frac{M(\alpha)}{\chi(\alpha)(\alpha - \zeta)} d\alpha \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{ここに、} M(\zeta) = & \frac{P}{2} \left(\bar{E}_c - E_c + \bar{E}_0 + \sum \frac{E_k}{\zeta_k} \right) - \frac{P}{1-\zeta} \left\{ \frac{E_0 + \bar{E}_0}{4} + \frac{E_0(\kappa + 1)}{8\pi i} \ln \frac{(\beta - 1)}{(\alpha - 1)} \right\} \\ & - \sum \frac{P}{\zeta_k - \zeta} \left\{ \frac{E_k}{2} + \frac{\kappa + 1}{8\pi i} \ln \frac{(\zeta_k - \beta)}{(\zeta_k - \alpha)} \right\} + \frac{P(\kappa + 1)w(\zeta)}{8\pi i} \ln \frac{(\zeta - \beta)}{(\zeta - \alpha)} \end{aligned} \quad (5)$$

3. 解析結果

図-2に $K=2$ (ポアソン比が、平面ひずみで $1/4$ 、平面応力で $1/3$) $\theta=45^\circ, 90^\circ$ の応力分布を示す。剛境界上では、 $\sigma_\theta/\sigma_r = (3-K)/(1+K)$

の関係がある。形

状が急変するB点、C点、D点で応力集中が見られる。 $\theta=90^\circ$ では、 $\tau_{\theta\phi}$ の符号が $y/a = -0.5$ 付近で変わ、ており、 $\theta=45^\circ$ では、その位置がBC部分で見られず、CD部分の $y/a = -0.95$ 付近にある。 x 上に剛体介在物が存在する時の先端近傍における応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I r}{\sqrt{2\pi r}} \left[(\kappa+3) \cos \frac{\theta}{2} - \sin \theta \sin \frac{3}{2} \theta \right] - \frac{K_{II} r}{\sqrt{2\pi r}} \left[(3-\kappa) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \theta \cos \frac{3}{2} \theta \right] \\ \sigma_y &= -\frac{K_I r}{\sqrt{2\pi r}} \left[(\kappa-1) \cos \frac{\theta}{2} - \sin \theta \sin \frac{3}{2} \theta \right] - \frac{K_{II} r}{\sqrt{2\pi r}} \left[(\kappa+1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \theta \cos \frac{3}{2} \theta \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I r}{\sqrt{2\pi r}} \left[(\kappa+1) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \theta \cos \frac{3}{2} \theta \right] - \frac{K_{II} r}{\sqrt{2\pi r}} \left[(\kappa-1) \cos \frac{\theta}{2} + \sin \theta \sin \frac{3}{2} \theta \right]\end{aligned}$$

(6)

$F_{Ir} + i F_{Iir} = (K_{Ir} + i K_{Iir}) / P \sqrt{\pi a}$ と無次元化した値を図-3、図-4に示す。これはクラックの応力拡大係数に相等する。ここで、 a は介在物の長さである。 F_{Ir} (モード1)の値は、 $\theta=35^\circ$ 付近で、異なる K に対して同一な値をもち、その角度を境にして大小関係が反転している。 F_{Iir} (モード2)の値は、 K にかかわらず、 47° 付近でピーク値をもち、 9° 付近で一致し、その角度を境にして大小関係が反転している。

4. あとがき θ がゼロに近づく場合の F_{Ir}, F_{Iir} の挙動、及び、線状剛体介在物の回転を許した場合の応力解析を今後検討していきたい。

(参考文献)

- 1) Hasebe, N. and Inohara, S. ; Stress Analysis of a Semi-Infinite Plate with an Oblique Edge Crack. Ingenieur-Archiv 49 51-62 (1980)
- 2) Hasebe, N. ; Uniform Tension of a Semi-Infinite Plate with a Crack at an End of a Stiffened Edge. Ingenieur-Archiv 48 129-141 (1979)

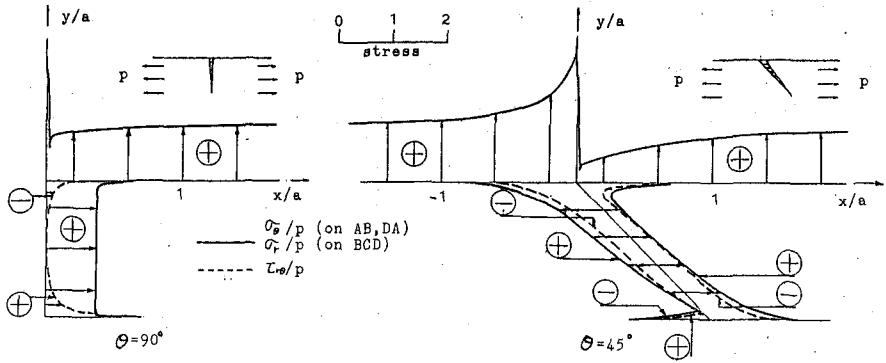


図-2 応力分布 ($K=2$)

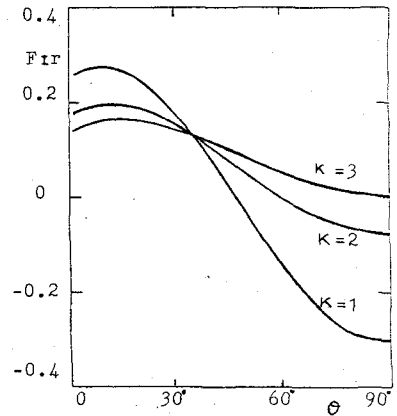


図-3 介在物先端の応力の特性性(1)

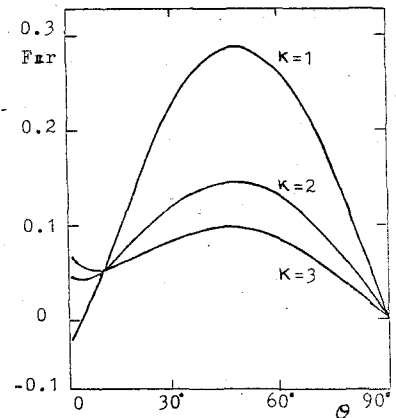


図-4 介在物先端の応力の特性性(2)