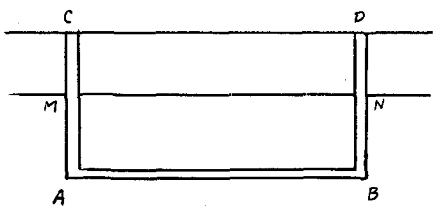
I—8

埋設平面ラーメンの強制振動

信州大学　正員　○夏目正太郎
〃　　〃　　石川　清志

§1. まえがき

弾性地盤内に置かれた骨組構造物が強制振動させられる場合の解を求めるものである。今、面内荷重による平面的な挙動に限定しておく。弾性地盤内の棒状構造は1次元の構造物強制振動で経験した。(ただし非減衰振動として)。こゝで2次元的挙動に応用してみるのである。左図に示すように、2本の柱が地層を貫通して底部を水平材で連結したラーメン構造である。異なる性質の層状地盤は、Winklarのバネ定数の違いで区別し、地盤の運動は切り離して、ここでは入れてない。ただし埋設構造物なる故に周囲の土圧なるものを附加質量的な考えで振動体と一体となって運動の中に取り入れる。外力は演算子法構造解析で扱う所の荷重マトリクスとして、任意の位置に作用させる。基本微分方程式は、変位に比例する反力を入れた所の弾性床上の桁のたて振動と、たわみ振動の解を単純に組み合せて、構造物全体の振動を表示するものである。



§2. 解の演算法

(i) 棒のたて振動

$$\frac{EA}{L^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}-\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+k_u u=g_u \sin pt \qquad (1)$$

$$u=u_h+u_p \qquad (2)$$

この微分方程式の右辺を0と置いて得られる同次解は

$$u_h=\lfloor \cos\mu\rho \quad \sin\mu\rho \rfloor \mathbb{M} e^{i\omega t} \qquad (3)$$

で、附加質量が存在するときは質量マトリクス$\mathbb{C}(\rho)$が挿入される。故に状態量は

$$u_h=\lfloor \cos\mu\rho \quad \sin\mu\rho \rfloor \mathbb{C}(\rho)\mathbb{M} e^{i\omega t}$$

$$F_h=\frac{\mu EA}{L}\lfloor -\sin\mu\rho \quad \cos\mu\rho \rfloor \mathbb{C}(\rho)\mathbb{M} e^{i\omega t} \qquad (4)$$

$$\mu^2=\left(\frac{\gamma A\omega^2}{g}+k_u\right)\cdot\frac{L^2}{EA}$$

特解は外力を荷重マトリクス$\underbrace{}_{}$$\mathbb{K}_u(k)$で加えられるので、基本的な解は同次解と同じ型をしている。

$$u_p=\lfloor \cos\mu_p\rho \quad \sin\mu_p\rho \rfloor \mathbb{C}(\rho)[\mathbb{M}_p+\langle\mathbb{K}_u(k)\rangle]\sin pt$$

$$F_p=\frac{\mu_p EA}{L}\lfloor -\sin\mu_p\rho \quad \cos\mu_p\rho \rfloor \mathbb{C}(\rho)[\mathbb{M}_p+\langle\mathbb{K}_u(k)\rangle]\sin pt \qquad (5)$$

$$\mu_p^2=\left(\frac{\gamma A p^2}{g}+k_u\right)\cdot\frac{L^2}{EA}$$

となる。

(ii) 棒のたわみ振動

$$\frac{EI}{L^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4}+\frac{\gamma A}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+k_w w=g_w \sin pt \qquad (6)$$

$$w=w_h+w_p \qquad (7)$$

同次解は2種類あって

(a) $$w_h=\lfloor \cos\nu\rho \quad \sin\nu\rho \quad \mathrm{ch}\,\nu\rho \quad \mathrm{sh}\,\nu\rho \rfloor \mathbb{N} e^{i\omega t} \qquad (8)$$

$$\nu^4=\left(\frac{\gamma A\omega^2}{g}-k_w\right)\cdot\frac{L^4}{EI}$$

(b) $$w_h=\lfloor e^{-\nu'\rho}\cos\nu'\rho \quad e^{-\nu'\rho}\sin\nu'\rho \quad e^{\nu'\rho}\cos\nu'\rho \quad e^{\nu'\rho}\sin\nu'\rho \rfloor \mathbb{N} e^{i\omega t}$$

$$\nu'^4=\frac{1}{4}\left(k_w-\frac{\gamma A\omega^2}{g}\right)\cdot\frac{L}{EI} \qquad (9)$$

となる。附加質量を考慮すると質量マトリクスは$\mathbb{C}(\rho)_w$が挿入され状態量は

$$\mathbb{W}_h(\rho)=\mathbb{D}\,\mathbb{R}(\nu\rho)\,\mathbb{C}_h(\rho)\,\mathbb{N}_h\, e^{i\omega t} \qquad (10)$$

$\mathbb{D}$：物理定数係数、$\mathbb{R}$：座標マトリクス

特解で強制外力を荷重マトリクス$\mathbb{K}_w(k)$であらわし固有マトリクス$\mathbb{N}_p$へ加味することになる。

$$\mathbb{W}_p(\rho)=\mathbb{D}\,\mathbb{R}(\nu\rho)\,\mathbb{C}_p(\rho)[\mathbb{N}_p+\langle\mathbb{K}_w(k)\rangle]\sin pt \qquad (11)$$

で特解の状態量が得られた。ラーメン構造ではたて振動とたわみ振動と合成して6次の量になる。

§ 3. 固有値と固有マトリクス

ラーメン構造としての挙動は先の式であらわせられるが、此の段階では一般解にすぎない。この種の微分方程式は、境界条件と初期条件を入れてはじめてそのラーメンの挙動を見ることになる。そこで各部材の節点においては、連続条件が成立しているので、二つの線材の始端と終端とを連続させることにより、漸次移行演算が出来、最後の境界条件において、同次解からは固有値決定方程式を得、特解からは固有マトリクスが一義的に求められる。

(i) 同時解の移行演算

(a) M, N における移行式は(r+1)部材の $\rho=0$ 端と、(r)部材の $\rho=1$ 端とを連続させる。

$$\mathbb{W}_{r+1}(0) = \mathbb{W}_r(1) \ ;$$

$$\begin{aligned}\mathbb{X}_{r+1} &= \mathbb{R}_{r+1}^{-1}(0)\cdot\mathbb{D}_{r+1}^{-1}\,\mathbb{D}_r\,\mathbb{R}_r(1)\,\mathbb{C}_r(1)\,\mathbb{X}_r = \mathbb{L}_r\,\mathbb{X}_r \\ &= \mathbb{L}_r\cdot\mathbb{G}_{r-1}\mathbb{X}_1 = \mathbb{G}_r\mathbb{X}_1 \end{aligned} \qquad (12)$$

これが漸化式である。

(b) A における移行式は(k)部材の $\rho=0$ 端と(1)部材の $\rho=0$ 端とを直角に連結させている。

$$\mathbb{W}_k(0) = \mathbb{I}_A\mathbb{W}_1(0) \ ,$$

$$\begin{aligned}\mathbb{X}_k &= \mathbb{R}_k^{-1}(0)\,\mathbb{D}_k^{-1}\cdot\mathbb{I}_A\cdot\mathbb{D}_1\,\mathbb{R}_1(0)\,\mathbb{X}_1 = \mathbb{L}_{k-1}\mathbb{X}_1 \\ &= \mathbb{L}_{k-1}\mathbb{G}_0\mathbb{X}_1 = \mathbb{G}_{k-1}\mathbb{X}_1 \qquad (\mathbb{G}_0 = \mathbb{E})\end{aligned} \qquad (13)$$

であらわされる。

(c) B における移行式は(s)部材の $\rho=0$ 端と(s-1)部材の $\rho=1$ 端とが直角に結びつけられている。

$$\mathbb{W}_s(0) = \mathbb{I}_B\cdot\mathbb{W}_{s-1}(1)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{X}_s &= \mathbb{R}_s^{-1}(0)\,\mathbb{D}_s^{-1}\cdot\mathbb{I}_B\cdot\mathbb{D}_{s-1}\,\mathbb{R}_{s-1}(1)\,\mathbb{X}_{s-1} = \mathbb{L}_{s-1}\mathbb{X}_{s-1} \\ &= \mathbb{L}_{s-1}\cdot\mathbb{G}_{s-2}\mathbb{X}_1 = \mathbb{G}_{s-1}\mathbb{X}_1\end{aligned} \qquad (14)$$

となる。これらでわかる様に、部材中間点の移行演算は(a)型で利用され、隅では(b), (c)型で移行することになる。

C点、D点は境界条件を造る点で境界条件マトリクスを $\mathbb{B}_{M+1}$, $\mathbb{B}_{N+1}$ とすれば

$$\left.\begin{aligned}\mathbb{B}_{M+1}\mathbb{X}_{M+1} &= 0 \\ \mathbb{B}_{N+1}\mathbb{X}_{N+1} &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

となり、それぞれの固有マトリクスを代入すれば

$$\begin{bmatrix}\mathbb{B}_{M+1}\cdot\mathbb{G}_M \\ \mathbb{B}_{N+1}\cdot\mathbb{G}_N\end{bmatrix}\mathbb{X}_1 = 0 \qquad (16)$$

を得、係数行列式を0にする根 $\omega_1, \omega_2 \cdots \omega_{2m}$ が求まる。$\mathbb{X}_1$ のうち1つの未定係数を Ω とおけば(16)より

$$\mathbb{X}_1 = \mathbb{P}(\omega)\,\Omega \qquad (17)$$

を得る。

(ii) 特解の移行演算

特解には荷重マトリクスがあるので $\rho=1$ 端の状態量を連続させるときに荷重マトリクスが附加されてくるが、同次解と考え方は同じである。故に

$$\mathbb{X}_{p\,r+1} = \mathbb{G}_r\mathbb{X}_{p1} + \mathbb{P}_{r-1} + \langle \mathbb{K}_{r+1}(x) \rangle \qquad (18)$$

となる。境界条件をとれば

$$\mathbb{B}\,\mathbb{G}\cdot\mathbb{X}_{p1} = -\mathbb{B}[\mathbb{P} + \mathbb{K}(x)] \qquad (19)$$

で与えられた外力(強制力)による固有マトリクス $\mathbb{X}_{p1}$ が決定される。かくして同時解と特殊解による状態量を合せて、このラーメンの状態量となる。

$$\mathbb{W}_r(\rho) = \sum_n^{2m}\mathbb{D}_n\mathbb{R}_n(\rho)\overbrace{\mathbb{C}_n(\rho)\,\mathbb{P}_n(\omega)}^{\mathbb{G}_r}\Omega_n e^{i\omega_n t} + \mathbb{D}_r\mathbb{R}_r(\rho)\,\mathbb{C}_r(\rho)\Big[\overbrace{\mathbb{X}_1}^{\mathbb{G}_r} + \mathbb{P}_{r-1} + \langle \mathbb{K}(x) \rangle\Big]_r \qquad (20)$$

と書ける。

(iii) 初期条件

2次元的挙動を示すので全体の動きを U, V とし初期条件としてこの変位と変位速度が0になるようにする。これらの変位をFourier級数で表わし、その係数を求めれば Ω を定める連立方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1\,2m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2\,2m} \\ a_{31} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{m\,2m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \\ \vdots \\ \Omega_{2m}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m\end{bmatrix} \qquad (21)$$

ここに得られた Ω_n をもって(20)へ代入すれば各点における状態量を算出出来る。

参考文献　谷本、石川 共著　演算子法構造解析 I (森北)
谷本勉之助 著　マトリクス構造解析 (日刊工業)