IV―2　重力モデルの漸近的不偏推定量について

岐阜大学工学部　正員　宮城俊彦

1. 研究目的

重力モデルのパラメータ推定は，一般に線形誤差構造を仮定し，線形回帰分析によって行なわれる。しかし，その結果得られるパラメータは偏りをもった推定量となり，したがって，推定分布交通量も偏りをもつ。本研究の目的はこの点を明らかにし，不偏推定量を求めるための修正方法を提示することである。

2. 従来の方法による重力モデルのパラメータ推定

次のような重力モデルの誤差モデルを考える。

$$V_{ij} = \alpha A_{ij}^{\beta} \exp(-\gamma t_{ij})\,\varepsilon_{ij} \qquad (1)$$

ここに，V_{ij}：ゾーン間分布交通量

A_{ij}：ゾーン間活動水準指標

t_{ij}：ゾーン間走行時間

ε_{ij}：誤差項，α, β, γ：パラメータ

式(1)の両辺の対数をとることによって，また変数と添字の変換を行なうことによって，次式に示す線形回帰モデルを得る。

$$\left.\begin{aligned} Y_i &= \theta_1 X_{i1} + \theta_2 X_{i2} + \theta_3 X_{i3} + e_i \\ X_{i1} &= 1 \end{aligned}\right\} i=1,2,\cdots,I \qquad (2)$$

式(2)において添字iはi番目のODペアであることを表わしており，それをODペアklとすると，式(1)と(2)の変数間の対応は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= \log V_{kl} & \theta_1 &= \log\alpha & e_1 &= \log\varepsilon_{kl} \\ X_{12} &= \log A_{kl} & \theta_2 &= \beta & & \\ X_{13} &= t_{kl} & \theta_3 &= -\gamma & & \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

式(2)に対しOLSを適用して得られるパラメータ推定量$\hat{\theta}$は不偏推定量である。このとき，重力モデルのパラメータ推定値は，

$$\hat{\alpha} = \exp\hat{\theta}_1 \ ,\ \hat{\beta} = \hat{\theta}_2 \ ,\ \hat{\gamma} = -\hat{\theta}_3 \qquad (4)$$

で与えられる。このとき，$\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$は不偏推定量を与えるように思われる。しかし，実際には$\hat{\alpha}$は不偏とはならず，したがって，推定OD交通量$\hat{V}_{kl}$も偏りをもった推定量となる。すなわち，通常の方法ではOD交通量は次式で与えられる。

$$\hat{V}_{kl} = \hat{\alpha} A_{kl}^{\hat{\beta}} \exp(-\hat{\gamma} t_{kl}) \qquad (5)$$

式(1)のタイプのモデルは経済学ではコブ=ダグラス型生産関数として知られており，コブ=ダグラス型生産関数のパラメータの厳密な推定量の求め方はGoldbergerによって示された。[1] また，期待値の漸近的不偏推定量についてはBolch & Huangによって与えられている。[2] しかし，彼らは式の誘導については全く触れてない。

3. 重力モデルの漸近的不偏推定量について

$Z = \exp X$ で与えられる確率変量Zの期待値と分散は，積率母関数ψを用いて次のように求めることができる。

$$E[Z] = \psi(1) \ ,\ V[Z] = \psi(2) - \psi^2(1) \qquad (6)$$

Xが期待値μ，分散σ^2の正規分布にしたがうならば，そのとき，

$$\left.\begin{aligned} E[Z] &= \exp\left(\mu + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) \\ V[Z] &= \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

となる。

さて，式(1)のVと(2)のYの関係は，上述のZとXの関係に等しい。したがって，式(7)を利用することによって，重力モデル(1)の種々の量の期待値と分散を求めることができる。

> ・式(1)のαの漸近的不偏推定量は次式で与えられる。
>
> $$\hat{\hat{\alpha}} = \hat{\alpha}\exp\left(-\tfrac{1}{2}S^2_{\hat{\theta}_1}\right) \qquad (8)$$
>
> ここに，$\hat{\alpha}$は式(4)で与えられ，また$S^2_{\hat{\theta}_1}$は推定パラメータ$\hat{\theta}_1$の分散推定量である。

（証明）誤差項e_iに関する仮定より，$\hat{\theta}_1$は期待値

θ_1, 分散 $\sigma^2_{\hat\theta_1}$ の正規分布にしたがう。よって, $\hat\alpha$ の期待値は,

$$E[\hat\alpha] = \exp(\theta_1 + \frac{1}{2}\sigma^2_{\hat\theta_1}) \qquad (9)$$

となり, $E[\hat\alpha] \neq \alpha$ であるから, $\hat\alpha$ は不偏推定量とはならない。これを不偏推定量に修正するためには,

$$\hat{\hat\alpha} = \hat\alpha \exp(-\frac{1}{2}\sigma^2_{\hat\theta_1})$$

とおけばよい。なぜならば,

$$E[\hat{\hat\alpha}] = E[\hat\alpha]\exp(-\frac{1}{2}\sigma^2_{\hat\theta_1}) = \alpha$$

となるからである。$\sigma^2_{\hat\theta_1}$ の推定値を $S^2_{\hat\theta_1}$ とおくことによって式(8)が得られる。■

式(1)の V_{ij} の漸近的不偏推定量 $\hat{\hat V}_{kl}$ は次式で与えられる。

$$\hat{\hat V}_{kl} = \hat V_{kl}\exp\{\frac{1}{2}(\hat\sigma^2 - S^2_{\hat Y_{kl}})\} \qquad (10)$$

$\hat V_{kl}$ は式(5)で与えられ, また $S^2_{\hat Y_{kl}}\ (= S^2_{\hat Y_i})$ は, Y_i の推定値の分散推定量である。

(証明) 誤差項 e_i に対する仮定より, $\hat Y_i$ は期待値 $Y_i\ (=\theta_1 X_{i1}+\theta_2 X_{i2}+\theta_3 X_{i3})$, 分散 $\sigma^2_{\hat Y_i}$ の正規分布にしたがう。添字 i が ODペア kl に対応しているものとし, $\hat V_{kl}$ の期待値を求めると,

$$E[\hat V_{kl}] = \exp(Y_{kl} + \frac{1}{2}\sigma^2_{\hat Y_{kl}}) \qquad (11)$$

となる。$\hat V_{kl}$ が不偏推定量であるためには,

$$E[\hat V_{kl}] = E[V_{kl}] = \alpha A_{kl}^{\beta}\exp(-\gamma t_{kl})E[\varepsilon_{kl}] \qquad (12)$$

が成立しなければならない。式(12)において,

$$E[\varepsilon_{kl}] = \exp(\frac{1}{2}\sigma^2) \qquad (13)$$

であるから, $E[\hat V_{kl}] \neq E[V_{kl}]$ となり, $\hat V_{kl}$ は偏りをもつ。これを修正するためには,

$$\hat{\hat V}_{kl} = \hat V_{kl}\exp(\frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1}{2}\sigma^2_{\hat Y_{kl}})$$

とおけばよい。このとき,

$$E[\hat{\hat V}_{kl}] = E[\hat V_{kl}]\exp(\frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1}{2}\sigma^2_{\hat Y_{kl}}) = E[V_{kl}]$$

が成立する。σ^2, $\sigma^2_{\hat Y_{kl}}$ の推定値を $\hat\sigma^2$, $S^2_{\hat Y_{kl}}\ (=S^2_{\hat Y_i})$ とおくことによって, 式(10)を得る。■

OD交通量の漸近的不偏推定量 $\hat{\hat V}_{kl}$ の分散推定量は次式で与えられる。

$$V[\hat{\hat V}_{kl}] = \hat{\hat V}_{kl}^2\{\exp(2S^2_{\hat Y_{kl}}) - \exp(S^2_{\hat Y_{kl}})\} \qquad (14)$$

(証明) 式(10)より,

$$V[\hat{\hat V}_{kl}] = V[\hat V_{kl}]\exp\{\hat\sigma^2 - S^2_{\hat Y_{kl}}\} \qquad (15)$$

したがって, $V[\hat V_{kl}]$ を求めればよい。$\hat V_{kl} = \exp(\hat Y_{kl})$ という関係式と式(7)を用いることによって,

$$V[\hat V_{kl}] = \exp(2Y_{kl} + 2\sigma^2_{\hat Y_{kl}}) - \exp(2Y_{kl} + \sigma^2_{\hat Y_{kl}})$$
$$= V_{kl}^2\{\exp(2\sigma^2_{\hat Y_{kl}}) - \exp(\sigma^2_{\hat Y_{kl}})\}$$

パラメータ推定値 $\hat\alpha, \hat\beta, \hat\gamma$ および分散推定値 $S^2_{\hat Y_{kl}}$ を用いることによって,

$$V[\hat V_{kl}] = \hat V_{kl}^2\{\exp(2S^2_{\hat Y_{kl}}) - \exp(S^2_{\hat Y_{kl}})\} \qquad (16)$$

したがって, 式(15), (16)より $V[\hat{\hat V}_{kl}]$ を求めることができる。この関係を式(10)を用いて書き換えることによって式(14)を得る。■

式(10), (14), (16)から明らかなように, $\hat\sigma^2 = S^2_{\hat Y_{kl}}$ ならば, $V[\hat{\hat V}_{kl}] = V[\hat V_{kl}]$ となる。

4. 結び

本稿は式(1)の指数型重力モデルに限定して議論を展開したが, 本稿で示された結果はその他の重力モデルに対しても同様に適用できる。線形回帰分析を行なうためには, 式(1)のタイプの誤差構造を仮定する必要がある。誤差項を分離した誤差モデルの場合にはもはや線形回帰理論は適用できず非線形回帰理論を必要とする。線形回帰理論を適用するにしても, これは式(2)に適用できるのであり, 式(1)に直接これを適用することはできない。従来の推定方法は式(2)で得たパラメータ推定値を単純に指数変換するだけで式(1)のパラメータ推定値としていた点に誤謬があった。また式(14)は交通量の区間推定を行なうのに必要となる。

参考文献

(1) Goldberger, A.S (1968) The interpretation and estimation of Cobb-Douglas production function, Econometrica, Vol.35

(2) Bolch, B.W. & C.J. Huang (1974) Multivariate statistical methods for business and economics, Prentice-Hall Inc