

金沢大学工学部 正会員 石田 啓

金沢大学大学院 学生員 ○中島光彦

1. はじめに 著者らはすでに1次元の波の変形について考究したが、実際の海岸工学上の諸問題を考える場合、波の反射、回折および屈折などを考慮した2次元的な取り扱いが必要となる。したがって、本研究では、その第一段階として、線形分散波の場合について、特性曲線法による平面2次元波の伝播の数値計算法を提示し、若干の計算結果を示す。

2. 基礎方程式およびその特性曲線表示 まず、Meiらの理論を平面2次元問題に拡張し、浅海における新たな非線形基礎方程式を誘導する。図-1のように設定した水面の高まり $\eta$ 、座標 $x$ 、 $y$ および $z$ ならびに水深 $h$ は、すべて基準水深 $h_0$ における初期波の波長 $L_0$ で無次元化し、時間 $t$ は $L_0/\sqrt{g h_0}$ で無次元化する。次に、 $L_0\sqrt{g h_0}$ で割って無次元化した速度ポテンシャル $\phi$ を、

$$\phi(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (z+h)^n \phi^{(n)}(x, y, t) \quad \dots \quad (1)$$

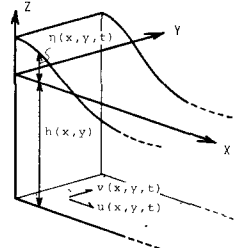


図-1 座標系

と展開し、これを1次元の場合と同様、ラプラスの式および底面境界条件式に代入し、得られた $\phi^{(n)}$ に関する関係式を用いると、水面における力学的および運動学的境界条件式は次のようになる。

$$u_t + u u_x + v u_y + \frac{\eta_x}{\varepsilon} - \frac{h^2}{2} u_{xxt} - \frac{h^2}{2} v_{xyt} = O(\varepsilon^5) \quad \dots \quad (2)$$

$$v_t + u v_x + v v_y + \frac{\eta_y}{\varepsilon} - \frac{h^2}{2} u_{xyt} - \frac{h^2}{2} v_{yyt} = O(\varepsilon^5) \quad \dots \quad (3)$$

$$\eta_t + [u(h+\eta)]_x + [v(h+\eta)]_y - \frac{h^3}{6} (u_{xxx} + u_{xyy} + v_{xxy} + v_{yyy}) = O(\varepsilon^6) \quad \dots \quad (4)$$

ここに、 $u = \phi_x^{(0)}$ 、 $v = \phi_y^{(0)}$ であり、 $\varepsilon = h_0/L_0$ である。なお、以上の3式は底面勾配 $h_x$ および $h_y$ が水深 $h$ に比べ、小さいという仮定のもとに誘導したものであり、底面勾配を水深と同程度に考慮した式はかなり複雑になるため、ここでは割愛する。次に、式(2)、式(3)および式(4)を、それ自身の1次近似式を用いて書き変え、非線形項を省略した線形の場合について、行列表示すれば、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{U}_t + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 & \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{\varepsilon} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{U}_x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h}{2} \\ \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & 0 & \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{\varepsilon} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{U}_y = \begin{bmatrix} a \\ \Omega \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{6}{\varepsilon h} (a + h_x u + h_y v) \end{bmatrix} \quad \dots \quad (5)$$

となる。ここに、 $\mathbf{U} = (\eta \ a \ u \ v \ \Omega)^T$ であり、この中の成分 $a$ および $\Omega$ はそれぞれ $\eta_t$ および $\eta_{tt}$ である。ここで、ある曲面 $\varphi(x, y, t) = 0$ を考え、その曲面上に局部座標 $(\varphi, \xi, \lambda)$ を導入し、これを用いて式(5)を書き変える。特性曲面は $\varphi(x, y, t) = 0$ 上で $\mathbf{U}$ を与えても、 $\mathbf{U}_\varphi$ が一義的に定まらない曲面として定義されるから、特性曲面を示す式は、

$$\det |\tilde{\mathbf{C}}| \equiv \det \begin{bmatrix} \varphi_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_t & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} \varphi_x & 0 & \varphi_t & 0 & \frac{1}{2} \varphi_x \\ \frac{1}{\varepsilon} \varphi_y & 0 & 0 & \varphi_t & \frac{1}{2} \varphi_y \\ 0 & 0 & \frac{6}{\varepsilon} \varphi_x & \frac{6}{\varepsilon} \varphi_y & \varphi_t \end{bmatrix} = \varphi_t^3 \left[ \varphi_t^2 - \frac{3h}{\varepsilon} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \right] = 0 \quad \dots \quad (6)$$

となる。 $\varphi_t = 0$ のとき、 $\mathbf{U} \tilde{\mathbf{C}} = 0$ を満たす左固有ベクトル $\mathbf{L}$ は $(1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$ となり、これより、

$$dx/dt = 0 \text{ かつ } dy/dt = 0 \text{ 上で, } d\eta/dt = a \text{ および } da/dt = \Omega \quad \dots \quad (7)$$

が導かれる。また、 $\varphi_y = 0$  とすると、 $dx/dt = \xi = \pm \sqrt{3h/\varepsilon}$  が得られ、 $\mathbb{L}\tilde{C} = 0$  を満たす  $\mathbb{L}$  は  $(\frac{1}{\varepsilon\xi} \ 0 \ 1 \ 0 \ \frac{\varepsilon\xi}{2})$  となり、陪特性曲線表示

$$dx/dt = \xi = \pm \sqrt{3h/\varepsilon} \text{ か } dy/dt = 0 \text{ 上で, } (\frac{1}{\varepsilon\xi} \ 0 \ 1 \ 0 \ \frac{\varepsilon\xi}{2}) \frac{dU}{dt} + (0 \ 0 \ 0 \ \xi \ 0) \frac{dV}{dt} = -\frac{2}{\varepsilon\xi} a - \frac{\xi}{h} (h_x u + h_y v) \dots \dots (8)$$

が得られ、同様に、 $\varphi_x = 0$  とおけば、

$$dy/dt = \xi = \pm \sqrt{3h/\varepsilon} \text{ か } dx/dt = 0 \text{ 上で, } (\frac{1}{\varepsilon\xi} \ 0 \ 0 \ 1 \ \frac{\varepsilon\xi}{2}) \frac{dU}{dt} + (0 \ 0 \ \xi \ 0 \ 0) \frac{dV}{dt} = -\frac{2}{\varepsilon\xi} a - \frac{\xi}{h} (h_x u + h_y v) \dots \dots (9)$$

が得られる。図-2に、このときの特性曲面と陪特性曲線を示す。

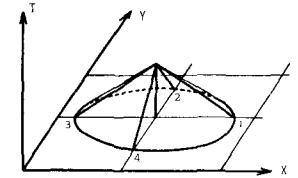


図-2 特性曲面と陪特性曲線

### 3. 特性曲線表示式の差分化

式(7)、式(8)および式(9)を差分化するが、

境界条件の違いにより、異なる差分式になる。境界パターンは、図-3のように、(a)境界が存在しない場合、(b)1方向に境界が存在する場合、および(c)2方向に境界が存在する場合の3つに分類され、これらの組み合わせにより、任意境界が構成される。まず、(a)の場合、次のステップの値を求める差分式は、

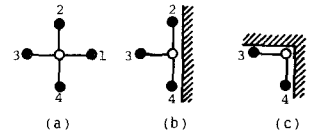


図-3 境界パターン

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\varepsilon\xi} (\eta_1 - \eta_3) + \frac{1}{2} (u_1 + u_3) - \frac{\varepsilon\xi}{12} (\Omega_1 - \Omega_3) \\ v &= -\frac{1}{2\varepsilon\xi} (\eta_2 - \eta_4) + \frac{1}{2} (v_2 + v_4) - \frac{\varepsilon\xi}{12} (\Omega_2 - \Omega_4) \\ \Omega &= -\frac{1}{2\varepsilon h} (4\eta - \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4) - \frac{3}{2\varepsilon\xi} (u_1 - u_3 + v_2 - v_4) \\ &\quad + \frac{1}{4} (\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4) - \frac{1}{\varepsilon} [3(u_x + v_y) + \frac{4}{h} a + \frac{6}{h} (h_x u + h_y v)] \Delta t \end{aligned} \dots \dots (10)$$

となる。また、境界(b)については、

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad v = -\frac{1}{2\varepsilon\xi} (\eta_2 - \eta_4) + \frac{1}{2} (v_2 + v_4) - \frac{\varepsilon\xi}{12} (\Omega_2 - \Omega_4) \dots \dots (11) \\ \Omega &= -\frac{2}{\varepsilon h} (3\eta - \eta_2 - \eta_3 - \eta_4) + \frac{2}{\varepsilon\xi} (u_3 - v_2 + v_4) + \frac{1}{3} (\Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4) - \frac{2}{\varepsilon} [2u_x + v_y + \frac{2}{h} a + \frac{3}{h} (h_x u + h_y v)] \Delta t \end{aligned}$$

となり、境界(c)については、

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad v = 0 \dots \dots (12) \\ \Omega &= -\frac{1}{\varepsilon h} (2\eta - \eta_3 - \eta_4) + \frac{3}{\varepsilon\xi} (u_3 + v_4) + \frac{1}{2} (\Omega_3 + \Omega_4) - \frac{3}{\varepsilon} [u_x + v_y + \frac{4}{3h} a + \frac{2}{h} (h_x u + h_y v)] \Delta t \end{aligned}$$

となる。また、式(7)を差分化しておかなければならない。

### 4. 計算結果

計算例として、長さ1波長の島堤に波が直角に入射する場合の計算を行った。図-4

は、島堤沿いの水面波形の時間変化を示したものであり、実線および破線はそれぞれ島堤前面および島堤背面の水面波形である。島堤前面では、波の反射により、振幅が増大しており、また背面では、回折波が伝播して行く様子がわかる。図-5は、島堤沿いの波高分布を示したものである。実線は本数値解であり、破線は台田らが求めたMathieu関数による解析解である。本数値解は解析解に比べ、波高は総じて小さめになっており、また、分布形状もなだらかになってきていることがわかる。

### 5. 結論

以上より、特性曲線法による平面2次元波の数値計算が可能であることがわかったが、波の進行に伴い、波高が若干減衰するといった問題点があり、今後の検討が必要である。

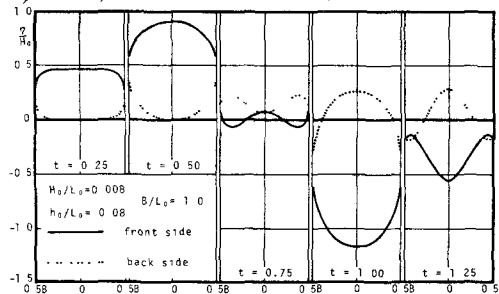


図-4 島堤沿いの水面波形の時間変化

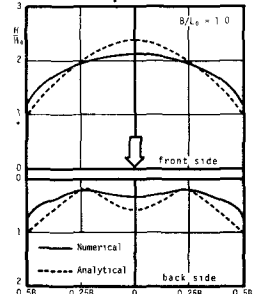


図-5 島堤沿いの波高分布