

図-1に示すような $\Delta\rho (= \rho_2 - \rho_1)$ だけ密度が異なる二流体が二層で流れている場合の問題は、一般に Kelvin・Helmholtz の不安定問題といわれる。上下層の流体の速度差が次第に大きくなると、境界面に界面波が発生し、相対速度差がある値をこえると、この界面波が不安定となり、界面波の砕波と混合が生ずる。河床波では、砕波のような形態にならず、河床材料の水中安息角がこの現象を不可能にしている。流体は非粘性・非圧縮性とし、微小振幅波として解析された界面波の流速 U_b は、次式のようになる。

$$U_b = \frac{U_1 m_1 + U_2 m_2}{m_1 + m_2} \pm \sqrt{\frac{g \Delta \rho + T k^2}{k(m_1 + m_2)} - \frac{(U_1 - U_2)^2 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}} \quad \text{----- (1)}$$

ここに、 $m_1 = \rho_1 \coth(k h_1)$ 、 $m_2 = \rho_2 \coth(k h_2)$ 、 g = 重力の加速度、 T = 単位長さ当りに作用する表面張力の強さ、 $k = 2\pi/\lambda$ (界面波の波数)、 λ = 界面波の波長、である。なお、 h_2 は、図-1の定義図のように、 x 軸が二層の境界面にとられているので負の値であるが、式(1)の誘導においては、 h_2 の負記号を考慮しているので、 $m_2 = \rho_2 \coth(k h_2)$ には、正の値の h_2 を代入する必要がある。

式(1)において、 U_b がもし複素数になると、その虚数部は波形を発散させるので、界面波の安定条件は式(1)の右辺第2項の根号の内部を正またはゼロに保つ必要がある。この安定条件を使用すると通常の密度流や河床波に相当する $\Delta\rho > 0$ の場合について、速度差で示す次のようになる。ただし、河床波への適用を考えて、 x 軸の下にある h_2 は負の値をとることにする (このため m_2 は $m_2 = -m_2$ とする)。

$$(U_1 - U_2)^2 \leq \frac{(m_1 - m_2)(g \Delta \rho + T k^2)}{-k m_1 m_2} \quad \text{----- (2)}$$

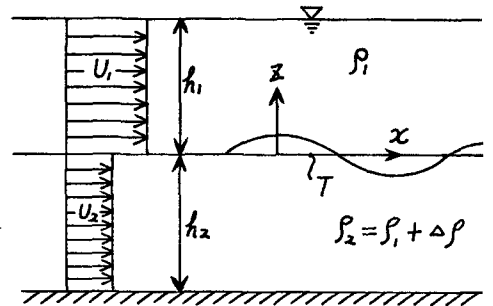


図-1 不連続境界面と界面波の定義図

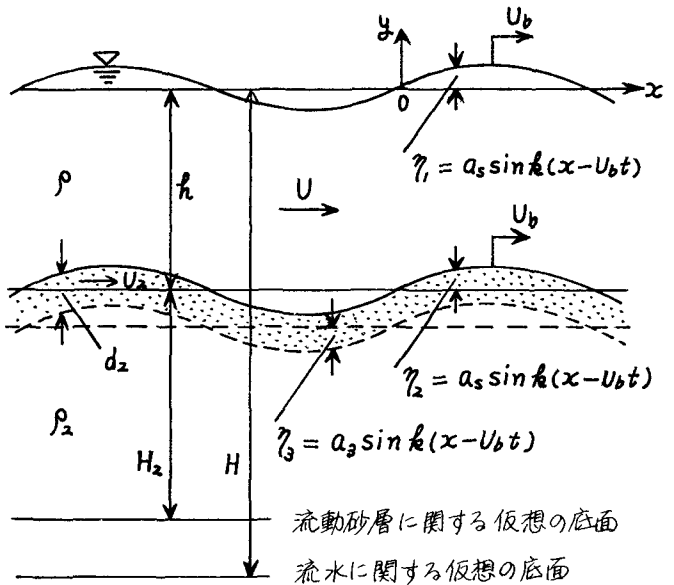


図-2 移動床流れの二層流モデル

界面波は、この速度差に対して安定である。白砂¹⁾が使用したように、図-2のような流動砂層に関する仮定の底面と流水に関する仮定の底面を考える。図-2を参照すると、式(2)の h_1 と h_2 は、それ

それ $h_1 = -(H-h)$, $h_2 = -H_2$ とおく必要がある。水に関する添字 1 を省略し, さらに表面張力を $T=0$ とすると, 式(2)から

$$(U-U_2)^2 = \frac{(\rho \coth kh(H-h) - \rho_2 \coth kh_2 H_2) \rho (\rho_2 - \rho)}{\rho \rho_2 \coth kh(H-h) \coth kh_2 H_2} \quad (3)$$

となる。ここで $U_2 = \alpha U$ とおき, 右辺の分母分子をそれぞれ ρ^2 で割ると,

$$U^2(1-\alpha)^2 = \frac{\rho(\coth kh(H-h) - (\rho_2/\rho) \coth kh_2 H_2) (\rho_2/\rho - 1)}{\rho_2 \coth kh(H-h) \coth kh_2 H_2} \quad (4) \quad \text{となる。この式の両辺を } gh \text{ で割り, } Fr^2$$

$= U^2/gh$ とおく, また, $\coth kh(H-h)$ と $\coth kh_2 H_2$ は, それぞれ次のように表わすことができる。

$$\coth kh(H-h) = \frac{1 - \tanh kh \tanh kh_2 H_2}{\tanh kh H - \tanh kh_2 H_2} \quad (5) \quad \text{一方, } H \text{ は式(6)より決定される。}$$

$$U^2 = (g/h) \tanh kh H \quad (6)$$

式(6)から $\tanh kh H = kh Fr^2$ となるから, 式(5)は

$$\coth kh(H-h) = \frac{1 - kh Fr^2 \tanh kh_2 H_2}{kh Fr^2 - \tanh kh_2 H_2} \quad (7)$$

$\coth kh_2 H_2$ は, $\coth kh_2 H_2 = \frac{1}{\tanh kh_2 H_2} = \frac{1}{\alpha^2 kh Fr^2} \quad (8)$ となる。

式(7), 式(8)を式(4)に代入して整理すると, 式(9)が得られる。

$$(kh)^2 \tanh kh_2 H_2 [-(\alpha^2 - 2\alpha \frac{\rho_2}{\rho} + \frac{\rho_2}{\rho})] Fr^4 + kh (\alpha^2 - 2\alpha \frac{\rho_2}{\rho} + (\frac{\rho_2}{\rho})^2) Fr^2 - (\frac{\rho_2}{\rho}) (\frac{\rho_2}{\rho} - 1) \tanh kh_2 H_2 = 0 \quad (9)$$

水の密度 ρ は $\rho = 1.0 \text{ g/ml (Mg/m}^3)$, 水と土砂から成る流動層の密度 ρ_2 は $\rho_2 = 2.0 \text{ g/ml (Mg/m}^3)$ とすると, $\rho_2/\rho = 2.0$ であるから

$$\{[-(\alpha^2 - 4\alpha + 2)](kh)^2 \tanh kh_2 H_2\} Fr^4 + \{(\alpha - 2)^2 kh\} Fr^2 - 2 \tanh kh_2 H_2 = 0 \quad (10)$$

式(10)を Fr^2 について解くと, 河床形態の限界の式が得られる。

$$Fr^2 = \left(\frac{Fr^2}{Fr^2} \right) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \alpha_1 \tanh^2 kh_2 H_2}}{\alpha_2 kh \tanh kh_2 H_2} \quad (11) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ここに, } \alpha_1 = 8(\alpha^2 - 4\alpha + 2)/(\alpha - 4)^2 \\ \alpha_2 = 2(\alpha^2 - 4\alpha + 2)/(\alpha - 2)^2 \end{array} \right\} \quad (12)$$

式(11)の Fr^2 と Fr^2 は右辺分子の土に対応させて使用したもので, 水と河床の流動層を示したものでない。 $\alpha = 0.04$ とおくときは, $\alpha_1 = 0.9983$, $\alpha_2 = 0.9588$ である。この結果は, 白砂¹⁾の結果と完全に一致し, さらに $\alpha_1 = 1.0$, $\alpha_2 = 1.0$ とおくときは, 林²⁾の結果とも完全に一致する。

閉水路の場合には, 自由表面がなく閉水路の上下面とも固い水平な壁面で囲まれた移動床の上の流れを考える。流水と河床の境界面に x 軸を, 鉛直上方に y 軸をとり, 記号は図-2の場合と同一とする。閉水路の場合は, 自由表面がないので, 完全な Kelvin-Helmholtz の不安定問題となる。閉水路の場合と同様に, $U_2 = \alpha U$, $T=0$ とおき, $h_1 = h_1$, $h_2 = -H_2$ とおく (水に関する添字 1 は省略する)。さらに, 式(2)の右辺の分母分子を ρ^2 で割ると,

$$U^2(1-\alpha)^2 = \frac{\rho(\coth kh + (\rho_2/\rho) \coth kh_2 H_2) (\rho_2/\rho - 1)}{\rho_2 \coth kh \coth kh_2 H_2} \quad (13) \quad \text{式(13)の両辺を } gh \text{ で割り,}$$

$$U^2/gh \text{ において整理して, 式(14)が得られる。} Fr^2 = Fr^2 = \alpha_3 (\tanh kh_2 H_2)/(kh) \quad (14)$$

$$\text{ここに, } \alpha_3 = (\rho_2/\rho) (\rho_2/\rho - 1) / \{\alpha^2 - 2\alpha (\rho_2/\rho) + (\rho_2/\rho)\} \quad (15) \quad \rho_2/\rho = 2.0 \text{ の場合には,}$$

$\alpha_3 = 2/(\alpha^2 - 4\alpha + 2)$ となって白砂¹⁾の結果と完全に一致する。なお $\alpha = 0.04$ のとき $\alpha_3 = 1.086$ となり, $\alpha = 0.3$ のとき $\alpha_3 = 2.247$ である。白砂¹⁾は $\alpha = 0.3$ が実験値と適合するとしている。

1) 白砂考夫 “河床液の発生について,” 第16回水理講演会講演集, 1972, PP.76-81.

2) Hayashi, T. “Formation of Dunes and Antidunes in Open channels, Proc. ASCE, HY2, 1970, PP.431-439