I — 4　　混合型変分エネルギー原理によるエラスチカ問題解法の試み

岐阜大学工学部　学生員　○小森俊浩
岐阜大学工学部　正会員　藤井文夫

1　はじめに

構造物の非線形解析、特に幾何学的非線形解析において、混合型構造解析手法の持つ優位性が近年になって注目されつつある。混合法を適用することにより主に、計算時間の大巾な短縮化と計算結果の高精度化を図ることが可能であるが，今後この種の計算理論をより効率的な構造解析理論とするためには，混合型変分エネルギー原理に基づく定式化の段階における基礎的研究が必要とされている。本研究は，このための基本研究として，古典的な高次非線形問題として知られている梁のエラスチカ問題を取りあげ、スプライン混合法による定式化を試みたものである。

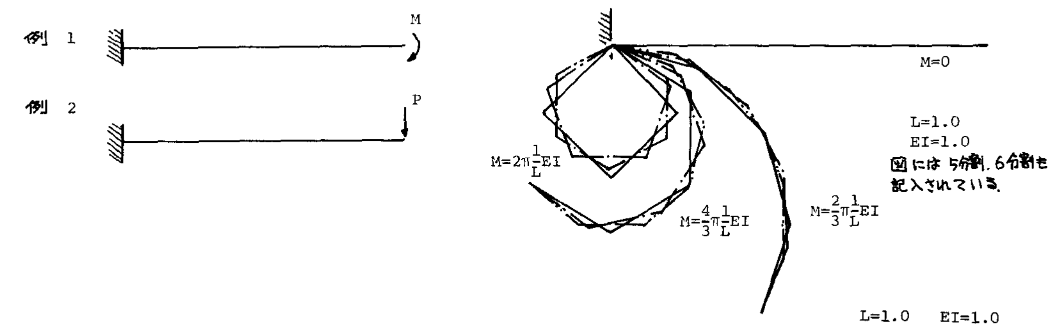
2．混合型変分エネルギー原理による定式化

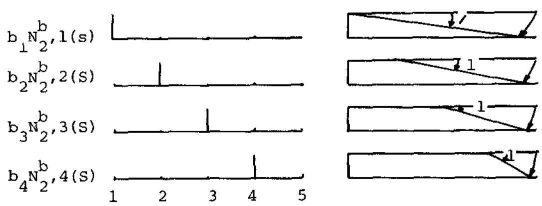
スプライン混合法とは，境界の近傍領域において，多重節点をもつ不完全スプライン関数を設定し，その節点の多重度を適当に操作することにより任意の境界条件を考慮しようとするエネルギー法である（文献〔3〕〔4〕参照）。これによれば，補間関数の次数を任意に変化させることができ，また離散化手法および非離散化手法の両者が可能であるが，エラスチカ問題の解法にあたっては離散化手法によるものとする。またスプライン関数の次数については，複雑な曲率表現を含むエネルギー定積分を避けるためにも，また補間関数に課せられた C^0 ー級の連続性を保証するためにも，$m=2$ の階数（すなわち一次式）を採用した。材料特性については部材軸の不伸長性（$EA=\infty$）を仮定し，曲線部材も折れ線で近似させるものとする。混合法において独立に補間されるべき場は，通常曲げモーメント場と変位場であるが，本研究の特徴として，曲げモーメント $m(s)$ と変位場の折れ角 $\theta(s)$ を補間した：$m(s)=\sum a_j N^a_{2,j}(s)$ および $\theta(s)=\sum b_j N^b_{2,j}(s)$ ；ここに s は部材軸に沿う座標軸，$N_{2,j}(s)$ は，$m=2$ のスプライン関数に対して，多重度3を課した場合に形成される不完全スプライン関数である。特に $N^b_{2,j}(s)$ は，節点 $s=s_j=s_{j+1}=s_{j+2}$ においてのみ定義される（Point-wise defined 例えば Dirac の δ 関数など）。以上の前提を考慮すると Hellinger-Reissner 汎関数は次のような表現式となる。$\pi_{mh}=-\frac{1}{2EI}\int m^2\,ds+\sum m_i\theta_i+$（$a_j$ および b_j を含む非線形表現の荷重ポテンシャル）：ここで EI は一定と仮定した部材曲げ剛性で，第一項と第二項はいずれも線形項であるが，第三項目の荷重ポテンシャルの表現が一般には非線形となる。これは，$\theta(s)$ を補間したために，$\theta(s)$ から変位成分を求めるときにその関係式が非線形となるためである。補間係数 a_j および b_j の決定条件式は，π_{mh} の停留条件 $\partial\pi_{mh}/\partial a_j=0$ および $\partial\pi_{mh}/\partial b_j=0$ から得られる。これは一般に高次非線形の連立方程式となり，BROYD の方法（SSL）によりこれを解いた。

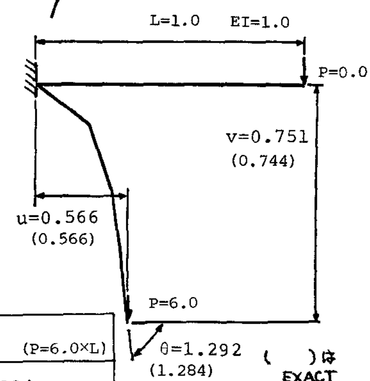
3．計算例

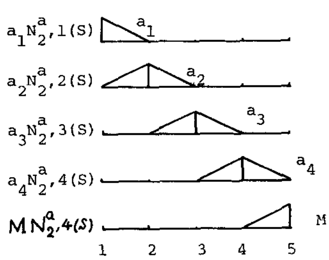
片持ち梁の自由端に，外力モーメント M（例1）ないしは鉛直方向の集中荷重 P（例2）が作用した場合を考える。補間関数を図に示したが，これは未知数の数を故意に $a_1\sim a_4$ および $b_1\sim b_4$ ときわめて小さくとったとき（計 8ヶ）の例である。特に例1においては，問題が非線形問題かつ，

完全に線形問題に変換されてしまうことが興味深い。結果を下の表にまとめたが，連立方程式の元数の少ない割には，非常に精度の良い結果が得られることに注目すべきである。その他の考察および計算例については，講演当日述べることとする。本研究は，文部省科学研究（奨励研究Ａ）「スプライン混合法による板殻構造物の幾何学的非線形性を考慮した座屈安定解析」の一部として行なわれた。









	例 1 (M=πEI/L)	例 2 (P=6.0×L)
a_1	3.141	3.394
a_2	3.141	1.993
a_3	3.141	1.041
a_4	3.141	0.439
b_1	0.3927 RAD.	0.3659 RAD.
b_2	0.7854 RAD.	0.5170 RAD.
b_3	0.7854 RAD.	0.2748 RAD.
b_4	0.7854 RAD.	0.1165 RAD.

[1] D.Karamanlıdis und K.Knothe
Geometrisch nichtlineare Berechnung von ebenen Stabwerken auf der Grundlage eines gemischt-hybriden Finite-Elemente-Verfahrens
Ingenieur-Archiv, Bd. 50 (1981), Nr. 6, S. 377-391

[2] E.Haugeneder und W.Prochazka
Zur Berechnung großer Verformungen von gekrummten Stäben
Ingenieur-Archiv, Bd. 50 (1981), Nr. 6, S. 401-411

[3] F.Fujii
Spline-Funktionen mit mehrfachen Knoten in der gemischten Plattenberechnung
Ingenieur-Archiv, Bd. 50 (1981), Nr. 6, S. 365-375

[4] F.Fujii
Discrete and non-discrete mixed methods for plate bending analysis
Int. J. for Num. Meth. in Engng., 1981 (to be published)