

岐阜大学 学生員 ○星野宇輝

岐阜大学 正会員 藤井文夫

1. はじめに

板の固有値問題の解法に解析的な手段を用いた場合、境界条件を考慮することにかかなりの工夫を必要とする。こうした解法に対して、本研究では境界条件を容易に考慮することのできる補間関数を導入した混合型エネルギー法を用いて板の固有値問題の解析を行った。解析対象としたのは異なる支持条件を有する長方形板の座屈・振動問題である。本報告は、混合法を固有値問題の解法に応用した場合の問題点を解決することにも、本解法の妥当性も確かめるものである。

2. 解析方法

解析にあたっては、多重節点を持つ不完全スプライン関数を補間関数として導入した混合型エネルギー法（スプライン混合法）を用いており、離散化手法あるいは非離散化手法として適用できる。

本解法では補間に用いた不完全スプライン関数の持つ節点の多重度を適当に操作することによって、非常に容易に境界条件を考慮することができる（文献[1], [2]参照）。曲げモーメント、ねじりモーメントおよびたわみを独立未知量とした Hellinger-Reissner 汎関数に変分エネルギー原理を適用して固有方程式を組立て、これを解いて固有値を求める。

3. 混合法を用いるにあたって生じる問題点とその処理

固有方程式は、次式(1)に示すように、

$$[A]\{x\} = \lambda[B]\{x\} \quad (1)$$

という一般形となる。変位法においても同様の形式となるが、つぎの式(2)に示すように係数行列[A], [B]の対角要素にゼロが現われず、ともに実対称正値行列となり固有方程式を解くにあたり何ら支障は生ぜず、この種の固有方程式を解くサブルーチンも用意されている。

$$\begin{array}{l} \text{変位法における} \\ \text{固有方程式} \end{array} \quad \begin{bmatrix} \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (2)$$

▨ ; 非ゼロ要素

$$\begin{array}{l} \text{混合法における} \\ \text{固有方程式} \end{array} \quad \begin{bmatrix} \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M \\ w \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \\ \text{斜線状要素} & \text{斜線状要素} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M \\ w \end{Bmatrix} \quad (3)$$

ところが、混合法を用いた場合、係数行列[A], [B]は式(3)に示すように実対称ではあるが、それぞれ非正値行列及び非正則行列となり、固有方程式をそのまま解くにははなはだ大きな障害となる。そこで、係数行列[A]は正則でありその逆行列[A]⁻¹が存在することに着目すれば固有方程式の係数行列を一つにまとめることができる。

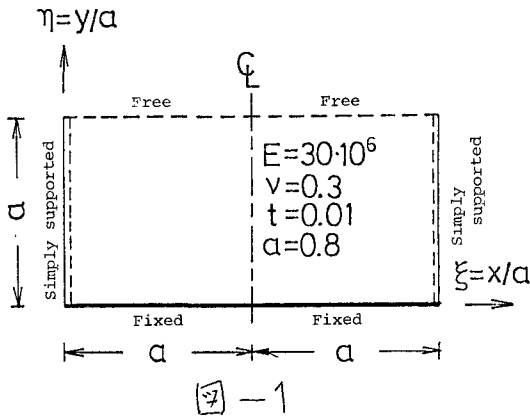
$$[C]\{x\} = \mu\{x\} \quad (4)$$

$$\text{ここに、} \quad [C] = [A]^{-1}[B], \quad \mu = 1/\lambda$$

行列 $[A]^{-1}[B]$ は、非正値な係数行列をもつ線形方程式の解法に適用可能な Bunch の方法を用いて求められる。係数行列 $[C]$ は実非対称行列となるが、固有方程式を式(4)の形にまでもってくると容易に解くことができる。真の固有値 λ は、式(4)を解いて求められた固有値 μ から、 $\lambda = 1/\mu$ によって得られる。

4. 計算例及び結果

数値計算例としてここでは座屈解析についてのみ報告する。図-1のように4辺のうち相対する2辺を単純支持、他の2辺を自由端及び固定支持された辺比1:2の長方形板に面内力 N_x を作用させる。座屈解析の場合、問題となるのはオ1固有モードを有するものだけであるから、この問題に関しては $x=a$ における対称性を考慮して、全領域の半分だけを解析すればよい。解析は離散化手法及び非離散化手法の両方について行った。結果を表-1に示す。結果は $n^* = N_x \frac{a^3}{E D}$ として無次元化してある。考察と他の計算例については譲渡当日述べることにする。



NON-DISCRETE				DISCRETE			
m	mesh	N _{sys}	n*	m	mesh	N _{sys}	n*
3	1 x 1	20	1.347	3	1 x 1	20	1.347
4		42	1.332		2 x 2	42	1.333
5		72	1.336		3 x 3	72	1.335
6		110	1.336		4 x 4	110	1.336
7		156	1.336		5 x 5	156	1.336

[3] 1.336

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$$
$$\nu = 0.3$$

N_x

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

a

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

a

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

$\downarrow$

a

[3] 1.336

$$N_x = N^* D/a^2$$
$$\sigma_x = N_x/t$$
$$\sigma_x = n^* \frac{E \pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2$$
$$n^* = N^*/\pi^2$$
$$\pi^2 = 9.8696$$

5. 付 記

本研究は、文部省科学研究(奨励研究A)「スプライン混合法による板殻構造物の幾何学的非線形性を考慮した座屈安定解析」の一部として行われた。

表-1

参考文献

- [1] Fujii, F.
Spline-Funktionen mit mehrfachen Knoten in der gemischten Plattenberechnung
Ingenieur-Archiv, Vol. 50, No. 6, pp. 365-375, 1981
- [2] Fujii, F.
Discrete and non-discrete mixed methods for plate bending analysis
International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1981
- [3] Fujii, F.
Fonctions Spline aux Noeuds Multiples en Analyse Numérique des plaques —
— Flexion, Flambement et Vibration ———
(manuscrit envoyé aux Annales de L'I.T.B.T.P.)