IV—8　　大気汚染の予測に関する2,3の考察

信州大学工学部　正　員　奥谷　巌
信州大学工学部　学生員○神宮　万寿夫

1. まえがき

大気汚染濃度の何時間か先の予測をした場合、その予測値がある値をこえた場合に交通量の制御を行うこと、又は、警告などを出せる意味で有意義であると思われる。そこで大気汚染濃度について基礎的な予測を行う。

2. 移動平均法

移動平均法は$MA(q)$と呼ばれ、一般的に次の様なモデルを考える。即ち

$(1-B)^d Z_t = \theta_0 + \theta(B) a_t$ ……(1)　　$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$ ……(2)　　ここに、

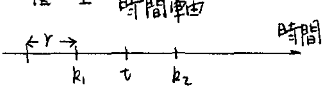
B：後退作用素、θ_0：定数、a_t：ホワイトノイズ、Z_t：時刻tの汚染量、であり、$\theta_1 \sim \theta_q$、及び a_t の分散σ_a^2は時系列データから決定すべきパラメータである。まずdの決定であるが、その為には、Z_t、$\nabla Z_t = Z_t - Z_{t-1}$、$\nabla^2 Z_t = \nabla Z_t - \nabla Z_{t-1}$……などの時系列に関して自己相関係数のグラフを描き、$\nabla^d Z_t$のグラフで初めて自己相関係数がかなり急な勾配で減少していたら、そのときのdの値をもってdとする。次に、$W_t = \nabla^d Z_t$とおいたときに、そのW_tの時系列に関して自己相関係数のグラフを描き、その形状により用いるモデルを決定する。$MA(q)$モデルでは、自己相関係数グラフにおいて、時間ずれqに対応する点までは、ある程度の値があり、$q+1$以降、急に0に近い値まで値が落ち込んでいたならば、これを用いる。ここで上述の判断過程で自己相関係数を事実上0か否かを判断する為には、Bart-lettの公式、$\sigma(r_k) \doteqdot \frac{1}{\sqrt{n}}\{1+2(r_1^2+r_2^2+\cdots+r_q^2)\}^{1/2}$ を利用しグラフで0を中心に $2\sigma_a(r_k)$の中に入っていれば事実上0と見なすという方法をとる。なお、本研究では$MA(q)$が、いかなる適応を示すかを考察する為のものであり、又、d、qが小さい値であることから $d=1,2$　$q=1,2$ の場合について行って見た。次にパラメータの決定であるが $r_k = (-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \theta_2\theta_k + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q)/(1+\theta_1^2+\theta_2^2+\cdots+\theta_q^2)$　$k=1,2\cdots q$ ……(3) という方程式が導かれるから 次の様な式におきかえ θ_jに初期値として0を代入し収束計算により求める。$\sigma_a^2 = C_0/(1+\theta_1^2+\theta_2^2+\cdots+\theta_q^2)$ ……(4)　$\theta_j = -(C_j/\sigma_a^2) + \theta_1\theta_{j+1} + \theta_2\theta_{j+2} + \cdots + \theta_{q-j}\theta_q$ ……(5)
ここで、C_j：W_tに関する自己相関関数である。次にこうして求まったθを最尤推定法の考え方に従って、$S(\theta) = \sum_{t=1}^{n} a_t^2 \longrightarrow min.$ となるように修正する。その為に式(1)の後退過程 $W_t = \theta(F)$ ……(6) を利用し一般にもつnなるtについて$e_t = 0$とおき、W_tのn個の時系列データを使い式(6)から e_{n-p}、e_{n-p-1}、… e_1を求める。次にそのeデータを使って W_{-j}の期待値$[W_{-j}]$ $(j=0,1,2\cdots)$を事実上$[W_{-J-1}] \doteqdot 0$ となるところまで求める（そのとき$[e_{-j}]=0$とおく）。次に $[a_{-j}]=0$ $(j>J)$ とおき式(1)を使い$[a_t]$の時系列を求める。この様に$\sum_{t=1}^{n}[a_t(\theta)]^2$が求まるので θを少づつ変えながら$S(\theta)$を最小にするθを見い出す。最後に、$Z_{t+k}$の予測する為には、$W_{t+l}$を予測すれば 式(1)より Z_{t+k}は求まる。つまりW_{t+k}の予測値$\hat{W}_{t+k}(l)$は $l=1\sim k$ の順に、既に得られているW_t、W_{t-1}… はその値を、a_{t-j}は $a_{t-j} = W_{t-j} - \hat{W}_{t-j-1}(1)$ を a_{t+j}は0をそれぞれ用いればよい。

3. KALMAN-FILTER 予測方法Ⅰ

ここでは予測の為に使うm個の状態量（汚染濃度(NOX)、交通量、風速、風向、気温、湿度、日射量、

雲量、大気安定度、以上であるが、風速と風向については直交する2方向の成分として計算を行った)を$x_1(t)$～$x_m(t)$、これを表わす為のベクトルを$x(t)$とし、又、$x(t-l)$にかかるパラメータを$H^l(t)=(h_1^l(t),\ h_2^l(t),\ \cdots h_m^l(t))$としたとき、予測しようとする状態量(NOX)のベクトル$^*z(t)$に対して次の様な予測モデルを考える $^*z(t+k)=H^0(t)x(t)+H^1(t)x(t-1)+\cdots+H^r(t)x(t-r)+W(t)$ …(1) ここに$W(t)$は予測誤差である。又、$h(t)=[H^0(t),\ H^1(t),\cdots H^r(t)]^T$なるベクトルを定義する。さらに$\Lambda(t)=[x^T(t),x^T(t-1),\cdots x^T(t-r)]$とするとき$^*z(t+k)=\Lambda(t)h(t)+W(t)$ …(2) ここで$h(t)$の定常性を仮定すると、次の様な式を得ることができる。$h(t)=h(t-1)+e(t-1)$ ……(3) eは誤差項である。又式(2)において$^*z(t+k)$を$y(t)$と書くことにし、$y(t)=\Lambda(t)h(t)+W(t)$ …(4) とするとカルマンフィルター理論を応用した予測問題より $h(t)$の最適推定値が次の様に表わされる。即ち式(3).(4)より $\hat{h}(t)=\hat{h}(t-1)+K(t)[y(t)-\Lambda(t)\hat{h}(t-1)]$ … (5) $K(t)$はカルマンゲイン行列と呼ばれるもので、あらゆる$t\geqq 0$に対してその値を求められる 計算式は割愛するが、$y(t)$なる観測値の時系列データを得るまえにあらかじめ計算しておけるという都合の良い性質がある。ところで式(5)は次の様に表わせる。$\hat{h}(t)=h(t-1)+K(t)[^*z(t+k)-{}^*\hat{z}(t+k)]$、ここで $^*\hat{z}(t+k)=\Lambda(t)\hat{h}(t-k)$ ところが実際の計算にあたっては[ ]の中で明らかなように、$h(t)$を推定するのに$(t+k)$時先のデータを用いるという不合理が生じてしまう。そこで定常性の仮定より$\hat{h}(t)$の代わりに$\hat{h}(t-k)$を用いることとし $^*z(t+k)=\Lambda(t+k)\hat{h}(t-k)$として計算する。手順としては 図-1のよう時間軸を考えた場合、$k_1,\ k-1,\ k-2,\cdots\ k-r$ のデータを用いて現時点tでの予測をし そのときの予測誤差をもって最適な$h(t)$を決めさらにこれをもとにして、t、$t-1$、$t-2$ … の最新のデータよりk_2時点を予測するのである。

図−1



予測方法Ⅱ

Iの方法では$\hat{h}(t)$に$\hat{h}(t-k)$を代用した為に、予測値は時間ずれを伴う傾向にあることが明らかになってきた。そこでここでは 日々の汚染量パターンの類似性に着目し、連続した日々の同時刻データをもとにした予測方法を述べることにする。なお記号説明は方法Iと同様な理論展開である為に、特別な場合を除いて省略する。まず予測モデルを考える。 $^*z^{t+k}(d)=H^{0t}(d)x^t(d)+H^{1t}(d)x^{t-1}(d)+\cdots+H^{rt}(d)x^{t-r}(d)+W^t(d)$ …(1)′ ここで( )の中は日を表わし $t+k$、t、$t-1$、$t-2$ … $t-r$ は時刻を表わすものである。

$h^t(d)=[H^{0t}(d),\ H^{1t}(d),\cdots\ H^{rt}(d)]^T$ $\Lambda^t(d)=[x^{tT}(d),\ x^{(t-1)T}(d),\cdots\ x^{(t-r)T}(d)]$ とすると $^*z^{t+k}(d)=\Lambda^t(d)h^t(d)+W^t(d)$ さらに $^*z^{t+k}(d)$を$y^t(d)$と書くと $y^t(d)=\Lambda^t(d)h^t(d)+W^t(d)$ …(2)′ 又 $h^t(d)$の定常性を仮定すると次の様な式を得ることができる。$h^t(d)=h^t(d-1)+e^t(d-1)$ …(3)′ (2)′、(3)′より カルマンフィルター理論を適用すると $h^t(d)$の最適推定値$\hat{h}^t(d)$は次の様に表わされる。

$\hat{h}^t(d)=\hat{h}^t(d-1)+K^t(d)[y^t(d)-\Lambda^t(d)\hat{h}^t(d-1)]$ ここで$h(d)$が日々刻々新しく変わり常に新しいものとして計算される。

〔参考文献〕 1) 栗谷 Box-Jenkins法による交通量の予測 2) 栗谷、杉本 自動車走行時間に関する基礎的考察