

岐阜大学 正会員 安田 孝志

岐阜大学 学生員 〇武山 保徳

Ⅱ. 緒言 波の非線形性が卓越してくる浅海域における不規則波浪の取扱い法の確立は, Nearshore Dynamics の究明に緊急の課題であろう。従来の不規則波の取扱い法としては, スペクトル法および波別解析法が知られているが, それぞれ限界を有し, これらに代わる取扱い法が強く要請されている。solitonが極浅海域での安定な波であることはよく知られており, 特にその固有値が時間的に不変であるという事実は, エネルギーの基本単位としてsolitonを考える場合に重要である。著者らは, solitonのこうした特性に着目し, solitonを基本単位としたスペクトル理論の展開を試み, ここでは, 浅海域の有限振幅波がsolitonによって表示できることを明らかにする。

②. クノイド波のsoliton表示 浅海域の波をsolitonによって表示するための一歩として, クノイド波がsolitonによって表示されることを示す。戸田¹⁾によって示された次式の関係

$$dn(\theta) = (\pi/2K)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sech}^2\{\pi Kk'(\theta/2K - l)\} - (\pi/2KK') + (E/K) \quad (1)$$

を用いれば, Jacobiのcn関数によって表されるクノイド波の波形 η は双曲線関数 sech によって表示できる。ここに, K および E ; 母数 k に対するオ1種およびオ2種完全楕円積分, K' ; 補母数 k' に対するオ1種完全楕円積分, dn ; Jacobiの dn 関数である。すなわち,

$$\eta = A \{cn^2\theta - (E/K + k^2 - 1)/k^2\} \quad (2)$$

$$= A \{(\pi/2AK)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sech}^2\{\pi Kk'(\theta/2K - l)\} - \pi/2kKK'\} \quad (3)$$

を得る。上式を $K-dV$ 方程式; $\eta_c + 3\eta\eta_x/2 + \eta_{333}/6 = 0$ に適用すれば, 次式のように振幅 A のクノイド波が振幅 A のsolitonの級数和で表示される。

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} a \operatorname{sech}^2\{\sqrt{3}a/2(\xi - Ct) - l\pi K/k'\} - (4AK^2/3\pi^2)\{3(E/K) + 2k^2 - 2\} \quad (4)$$

ここに, $C = -(2AK^2/\pi^2)\{3(E/K) + k^2 - 2\}$ および $a = A(\pi/2AK)^2$ である。

なお, クノイド波がsolitonに一致する $k=1$ の極限で, 式(4)は

$$\eta = a \operatorname{sech}^2\{\sqrt{3}a/2(\xi - Ct/2)\} \quad (5)$$

となることから, 式(4)の個々の成分はsolitonであることは明らかである。これから, クノイド波は一定波高のsolitonが一定間隔で運がったものであると考えることができ, solitonを浅海域の基本単位と考えることの可能性が示唆される。またsolitonを浅海域の有限振幅波の基本単位であるとするれば, 波の特性を考える上で重要と考えられてきた周期は, 単にsolitonの間隔を与えるものに

過ぎず, 波自体の特性は波高のみによって一義的に定まることに 図-1 クノイド波の波形に関する式(2)と $l=0$ としたときの式(3)との比較なる。図-1は, 隣接したsolitonの影響を明らかにするため, $l=0$ として, 母数 $k=0.5$, から $=0.98$ の波に対して式(2)および式(3)の比較を示してある。これから, 母数 k が0.98程度以上になると, 隣接

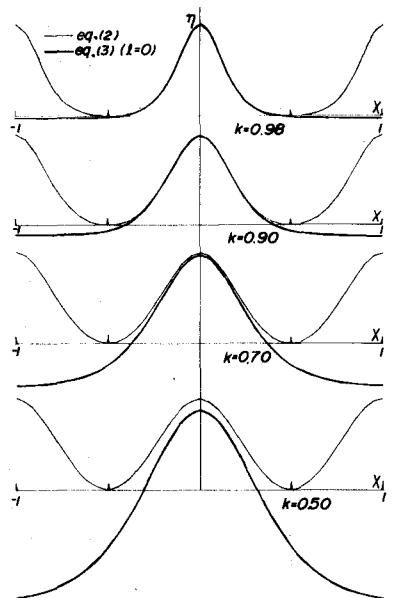


図-1 クノイド波の波形に関する式(2)と $l=0$ としたときの式(3)との比較

した soliton の影響は消え、1 個の soliton がクノイド波の 1 波に対応するようになり、個々の soliton の独立性が明らかとなっている。なお、このときの soliton は岩垣によって提案された hyperbolic 波に対応するものと考えられる。図-2 は、 η の値を十分大きくしたとき

きの式(2)と式(3)の比較を示しており、当然のことながら、式(5)によってクノイド波の表示が十分可能であることが分る。

③. 不規則クノイド波の soliton 表示 Urself 数が 100 を越えるうねり性の波の波形 η を、soliton 間の相互干渉がほぼ無視できるものとして、次式のように表す。

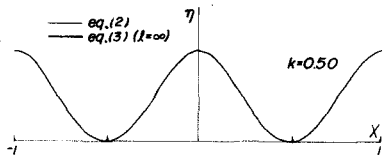


図-2 クノイド波の波形に関する式(2)と式(3)との比較

$$\eta = \sum_{i=1}^N \eta_i - B, \quad \eta_i = A_i \operatorname{sech}^2\left\{\left(\sqrt{3}A_i/2\right)\theta - \delta_i\right\} = A_i \xi_i \quad (6)$$

ここに、 δ_i は各 soliton の位相のズレを示し、式(6)が K-dv 方程式を満足する程度の大きさを有するものとする。 B は波形の連続条件より変わる定数である。したがって δ_i を観測 data から読みとることにすれば、未知量は固有値 A_i のみとなるので A_i を推定するため、式(6)を正規直交系に書き換える。Schmidt の方法を用いれば式(6)の η は次式のように正規直交系の 1 次結合で示される。

$$\left. \begin{aligned} \eta_i &= A_i \sum_k C_{ik} \phi_k, \quad \phi_k = \det F \cdot G(\xi_1, \dots, \xi_{k-1})^{-1/2} \cdot G(\xi_1, \dots, \xi_k)^{-1/2} \\ (\xi_i, \xi_k) &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \xi_i \cdot \xi_k d\theta, \quad G(\xi_1, \dots, \xi_N) = \det(\xi_i, \xi_k), \quad i, k = 1 \sim N, \\ C_{ik} &= D_{ki} \cdot (d_{11} \cdot d_{22} \cdots d_{NN})^{-1}, \quad i, k = 1 \sim N \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$F = \begin{bmatrix} (\xi_1, \xi_1) & \cdots & (\xi_1, \xi_N) \\ \vdots & & \vdots \\ (\xi_N, \xi_1) & \cdots & (\xi_N, \xi_N) \end{bmatrix}$$

D_{ki} は $\det D$ の d_{ki} 要素の余因子であり、行列 D およびその要素の d_{ik} は次式のように表される。

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N1} & d_{N2} & \cdots & d_{NN} \end{bmatrix}, \quad d_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik} \cdot G(\xi_1, \dots, \xi_{k-1})^{-1/2} \cdot G(\xi_1, \dots, \xi_k)^{-1/2} \quad (8)$$

M_{ik} は $\det F$ の F_{ki} 要素の余因子である。いま、trough の水位を基準面として Potential energy を考えてみると、それは次式のように表わされる。

$$E_p = (p\theta/2) (\eta+B)^2 = \sum_{i=1}^N (p\theta/2) \eta_i^2 + p\theta \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N A_i A_k C_{ii} \cdot C_{ik} \quad (i > k) \quad (9)$$

ここで、各 soliton が独立であるとすれば、行列 D は $1/\eta_{i11}$ ($i; 1 \sim N$) を要素とする対角行列となる。この結果、 $i \neq k$ のときの余因子 D_{ik} はゼロとなるため、式(7)から $C_{ik} = 0$ 。よって、式(9)は

$$E_p = (p\theta/2) (\eta+B)^2 = \sum_{i=1}^N (p\theta/2) \eta_i^2 \quad (10)$$

と書き換えられ、当然のことながら soliton スペクトルにおいては個々の soliton にエネルギーが保有され、soliton がエネルギーの基本単位となっていることがわかる。上述のように η は正規直交関数 ϕ_k の 1 次結合で表示されるので、この関係を利用すれば容易に唯一つの未知量である固有値 A_i を決定することができる。すなわち ϕ_k は正規直交系故、 $(\eta+B)$ に ϕ_i を掛け、波の計測期間 $\theta_1 \sim \theta_2$ で積分すれば、次式のように A に関する表示が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\eta+B) \phi_i d\theta &= \sum_{i=1}^N A_i \cdot C_{ii} \\ \vdots \\ \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\eta+B) \phi_N d\theta &= \sum_{i=1}^N A_i \cdot C_{iN} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \int (\eta+B) \phi_i d\theta \\ \vdots \\ \int (\eta+B) \phi_N d\theta \end{aligned} \right\} = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & C_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} \Rightarrow \{\Xi\} = [C] \{A\} \quad (11)$$

これより、 $\{A\} = [C]^{-1} \cdot \{\Xi\}$ によって soliton スペクトルの固有値ベクトル $\{A\}$ を決定できる。

4. 結語 ここでは、soliton 間の干渉のない場合のスペクトル分解を示したが、今後は干渉のある場合について試みていきたい。

参考文献 1) Toda, M ; Waves in Nonlinear Lattice , Progress of Theoretical Physics , No.45 , 1970