II—18　　利水用貯水池での空水に至る期間長分布の非対称性推定

名古屋工業大学　○学生員　依田　真
名古屋工業大学　　正　員　長尾正志

1. 研究の意義・目的

渇水時における貯水池の利水機能の評価において，目標とされる放流量がどの程度満足されるかという，量的な問題と同時に，現在の貯水量と目標放流量を前提として，空水に至るまでの期間長が，どれ位あるかという，時間的な側面はとくに異常渇水予想時において重要である。本研究は空水に至る期間長（いわゆる，first passage time）の分布の特性値，つまり，平均・分散・ひずみ係数の計算方法を提示すると共に，実際の貯水池について適用計算を行い，初期貯水量や目標放流量によってこれらの分布特性値が，どのように変化してゆくかを考察したものである。なお，本研究は参考文献1)，2)の成果を利用した研究であり，2.2節では概略のみを示す。

2. 期間長分布の非対称性の推定

2.1　基礎仮定　　次の記号および前提を用いる．　X_n：期間（n，$n+1$）($n=0,1,\cdots$)の間の流入量，ただし独立流量系列とする。Z_n：時点nの直前の貯水量，k,m：貯水池の有効貯水容量，目標放流量，放流規則は単位期間内にできるだけ貯留し，期末に一度に放流するとすれば，貯水量方程式は次のようになる。$Z_{n+1}=\min(k, Z_n+X_n)-\min(m, Z_n+X_n)$ また，$\mathbb{P}=(p_{ij})\,(i=j=0,1,\cdots)$：貯水量$Z_n$から$Z_{n+1}$への移行の遷移確率行列，$\Gamma$：$\mathbb{P}$の第1行および第1列を除去した行列($p_{ij}$)($i=j=1,2,\cdots$)，$\phi$：$\mathbb{P}$の第1列で第1行の要素を除去した列ベクトル($p_{i0}$)($i=1,2,\cdots$)，$r_i$：$\Gamma$の第$i$行に相当する行ベクトル($p_{ij}$)($j=1,2,\cdots$)，$T_i$：初期貯水量$i$から出発して，貯水量が初めて零になる期間長，$F_i$：$T_i$の積率母関数

2.2　期間長分布の平均・分散[1,2]　初期貯水量iから始まり，期間nの後に貯水量が零になる確率を$f_i^{(n)}$とする。$f_i^{(n)}$は行列演算を用いれば，次のようになる。$f_i^{(n)}=r_i\Gamma^{n-2}\phi$　($n\geq 2$)，また，$f_i^{(1)}=p_{i0}=G_{m-i}$，なお，$g_i=P_r\{X_n=i\}$と書けば，$G_{m-i}=\Sigma_{j=0}^{m-i}g_j$ である。ついで，

$F_i(z)\equiv\Sigma_{n=0}^{\infty}f_i^{(n)}z^n$　(1)，は次のように計算できる。$F_i(z)=G_{m-i}z+z^2r_i(\mathbb{I}-z\Gamma)^{-1}\phi$　(2)

ただし，$\mathbb{A}^{-1}$は$\mathbb{A}$の逆行列であり，$\mathbb{I}$は単位行列である。(2)式により，T_iのp.g.f.の性質から，T_iの平均および分散は，$E\{T_i\}=[dF_i(z)/dz]_{z=1}\equiv F_i'(1)$，$V\{T_i\}=E\{T_i^2\}-E^2\{T_i\}$で計算することができ，結果のみ示せば次式のようになる。

$$E\{T_i\}=F'(1)=G_{m-i}+2r_i(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}\phi+r_i(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}\Gamma(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}\phi \quad (3)$$

$$V\{T_i\}=G_{m-i}(1-G_{m-i})+4(1-G_{m-i})r_i(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}\Gamma(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}\phi+(5-2G_{m-i})r_i\times(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}\Gamma(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}\phi-[r_i\{2(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}+(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}\Gamma(\mathbb{I}-\Gamma)^{-1}\}\phi]^2 \quad (4)$$

2.3　期間長分布のひずみ係数　　ひずみ係数は次式で定義される。

$C_s=\mu_3/[V\{T_i\}]^{3/2}$　(5)，　μ_3は平均値まわりの3次の積率で，次式の関係がある。

$\mu_3=E\{T_i^3\}-3E\{T_i^2\}E\{T_i\}+2E^3\{T_i\}$，　これに(1)式を用いれば，

$\mu_3=F'''(1)+3\{F''(1)+F'(1)\}\{1-F'(1)\}-2F'(1)[1-\{F'(1)\}^2]$　(6)となる。

（2）式を微分し，$Z=1$ を代入すれば，$F'(1)$，$F''(1)$，$F'''(1)$ の各項は計算される。たとえば，$F'(1)$ は（3）式となり，$F''(1)$，$F'''(1)$ は以下のようになる。

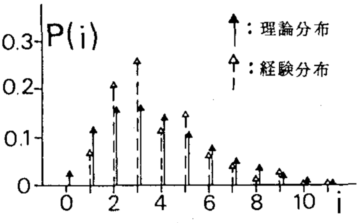
$$F''(1)=2r_i(\mathrm{I}-\Gamma)^{-1}\Phi+4r_i(\mathrm{I}-\Gamma)^{-1}\Gamma(\mathrm{I}-\Gamma)^{-1}\Phi+2r_i\{(\mathrm{I}-\Gamma)^{-1}\Gamma\}^2(\mathrm{I}-\Gamma)^{-1}\Phi \quad (7)$$

$$F'''(1)=6r_i(\mathrm{I}-\Gamma)^{-1}\Gamma(\mathrm{I}-\Gamma)^{-1}\Phi+12r_i\{(\mathrm{I}-\Gamma)^{-1}\Gamma\}^2(\mathrm{I}-\Gamma)^{-1}\Phi+6r_i\{(\mathrm{I}-\Gamma)^{-1}\Gamma\}^3\times(\mathrm{I}-\Gamma)^{-1}\Phi \quad (8)$$

，（6）式に（3），（7），（8）式を代入すれば μ_3 は求められるから，この μ_3 と（4）式を（5）式に代入すれば，ひずみ係数は計算できる。

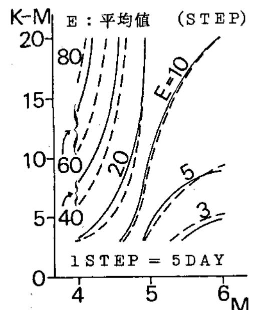
3. 適用計算例

3.1　計算例　天竜川水系，美和ダムについて計算した。横軸に目標放流量（M），縦軸に初期貯水量（$i=0, 1, \cdots K-M$）をとった平面上の値として，期間長の平均，分散，ひずみ係数を表示した図をそれぞれ，図－2，図－3，図－4に示す。流入量分布は，12月～2月の3ヶ月間の流入量について，単位日数を5日と考え，過去10年間の平均の流況とした。さらに，基底流量として $2\ m^3/sec$ をあらかじめ流量分布から控除し，単位化流量 $1\ m^3/sec$ により離散化した経験分布に対して，2次以下の積率の合致により，負の二項分布を理論分布として設定した。経験分布と理論分布を図－1に示す。なお，流量系列は独立が前提であるが，上記の流況について，単位ずれの自己相関係数は0.48である。図－2～4の各図について，実線は流量分布に理論分布を用いたもの，破線は経験分布をそのまま用いたものである。なお，現実の美和ダムでは，単位化流量を $1.0\ m^3/sec$ にとれば，離散化した有効貯水容量は約48になるが，計算結果を判りやすくするため，ここでは，K＝27とした結果で示す。



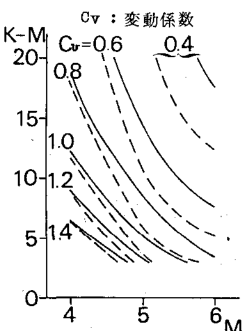
図－1

3.2　考察　期間長分布の特徴としては，一般にひずみ係数が正である。したがって，分布形のピークの位置は，図－2から読み取れる平均値より，値の小さい方にあり，特に初期貯水量が少なくなれば，その傾向は強まる。このことは，渇水期においては，単に平均値や分散だけではなく，分布の非対称性，つまり，ひずみ係数が重要であることを意味する。放流量を一定とすれば，初期貯水量が少なくなるほど，分布は正の歪が大きくなると共に，標準偏差は小さくなり尖りが大となる。また，初期貯水量を一定とすれば，放流量が増すにつれて平均値と変動係数は減少し，分布形は値の小さい方へ移動しながら，尖りは大となる。一方，ひずみ係数も減少するので，分布は対称形に近づく。

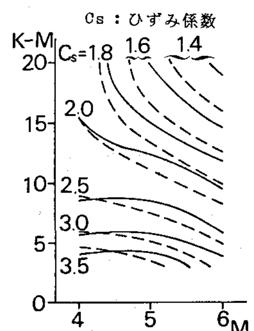


図－2

本計算例では，流入量の平均値は離散化した単位で約4（$6.0\ m^3/sec$）であり，したがって，M＝4以下では，満水への傾向が卓越する。



図－3



図－4

参考文献

1)，長尾正志・梶間孝洋志：利水用貯水池における期間長特性の確率行列による推算，水理講，1980，PP. 65～70

2)，長尾正志・梶間孝洋志：貯水池で水不足に至る期間長の確率的特性の推定，年講，1979，PP. 9～10