II—1 湖水の流動予測に関するモデリング法

信州大学工学部 正員 荒木正夫，富所五郎
大学院 学生員○松本良一

I. 序

湖水の流動を予測するにあたり，どのようなモデリングを行なうかが重要である。特に，エネルギー逸散の大きさを示す渦動粘性係数の算定とその物理的妥当性が問題となる。従来，渦動粘性係数は数値計算を行なう際に計算の安定性から求められており[1]，物理的考察が余り加えられていないのが現状である。本研究では，渦動粘性係数がメッシュスケールに依存すると考えた。また，有限要素法による三次元モデルとして境界条件を考慮した近似関数を用い，水平方向に区分的多項式，鉛直方向に余弦関数とした。以上のモデリング法を用いた解析により物理的に妥当な結果が得られたので報告する。

II. 基礎方程式と有限要素法への離散化

流れを支配する基礎方程式は Reynolds eq. で，無次元化すると，

$$\partial u/\partial t + R_0(u\,\partial u/\partial x + v\,\partial u/\partial y + w\,\partial u/\partial z) = -E\,\partial P/\partial x + E_V\,\partial^2 u/\partial z^2 + E_H(\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2) + v \quad (2\cdot1)$$

$$\partial v/\partial t + R_0(u\,\partial v/\partial x + v\,\partial v/\partial y + w\,\partial v/\partial z) = -E\,\partial P/\partial y + E_V\,\partial^2 v/\partial z^2 + E_H(\partial^2 v/\partial x^2 + \partial^2 v/\partial y^2) - u \quad (2\cdot2)$$

$$\partial w/\partial t + R_0(u\,\partial w/\partial x + v\,\partial w/\partial y + w\,\partial w/\partial z) = -Q(\partial P/\partial z + 1) + E_V\,\partial^2 w/\partial z^2 + E_H(\partial^2 w/\partial x^2 + \partial^2 w/\partial y^2) \quad (2\cdot3)$$

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0 \quad (2\cdot4)$$

境界条件として，湖底面 $z=-h$ で $u=v=w=0$，水面 $z=\eta$ で $\partial u/\partial z=\tau_x$, $\partial v/\partial z=\tau_y$ とする。ここで x 軸を東に，y 軸を北に，z 軸を静水面位を0として鉛直上向きに取り，各方向の流速を u, v, w とした。τ_x, τ_y はせん断応力である。R_0 は Rossby number $=U/fL$，E_V は Vertical Ekman number $=A/fD^2$，E_H は Horizontal Ekman number $=A/fL^2$，Fr は Froude number $=U/\sqrt{gD}$，そして E は R_0/Fr^2，Q は gL/fUD である。また上記の U, L, D, f, g, A は各々，代表流速，代表水平寸法，代表水深，コリオリ係数，重力加速度，渦動粘性係数を表わす。以上の諸量に値を入れて計算すると (2·3) 式では右辺第1項が非常に大きいのでこれのみを扱い z 方向に積分すると，$P=-z+\eta$ となる（但し，大気圧を0とする）。

次に，基礎方程式を有限要素法へ離散化する。流速の形状関数として水平方向には区分的多項式を鉛直方向には余弦関数を用いて離散化した。[2]

離散化するにあたってメッシュスケールを考慮した渦動粘性係数を用いる必要がある。その理由として有限要素法によって離散化された Reynolds eq. は，メッシュ以下の微細な変化を再現しておらず，メッシュによって空間の小領域について平滑化されたものを見ているのである。これによって再現される Reynolds 応力は，通常の場合の Reynolds 応力と異なりメッシュスケールに依存したものとなる。従って，渦動粘性係数もメッシュスケールによって決定される必要があり，水平方向と鉛直方向とで離散化するスケールが異なるモデリングを行なう場合は，各方向の渦動粘性係数を相異なった値にする必要がある。水平メッシュスケールを L_1，鉛直メッシュスケールを L_2 とすると，水平渦動粘性係数 A_H は，

$$A_H = A_V \times (L_1/L_2)^{\frac{4}{3}} \quad (2\cdot5)$$

となる。ここに，A_V は鉛直渦動粘性係数を示す。(2.5)式で A_H を水平方向と鉛直方向のメッシュスケールの4/3乗と A_V との積に等しいとしたのは，乱流拡散でRichardsonが導いた"拡散係数がスケールの4/3乗に比例する"という考えを参考にしたものであり，拡散係数と渦動粘性係数が比例関係にあると考えたからである。(2.1)~(2.3)式で用いた渦動粘性係数 A を A_H と A_V で置き換え，$E_H=A/fL^2$, $E_V=A/fD^2$ が，$E_H=A_H/fL^2$, $E_V=A_V/fD^2$ とした。

III. 解析結果と結論

解析対象は縦3km，横1.5km，水深4mの貯水池で，浅くて流動の起こり易い貯水池と言える。このため余弦関数の項数をx, y方向各々2項ずつ取った。[3] 解析条件としては，風速2m/secの風が貯水池全体に一様に吹き続け，$\tau_x=0.0$, $\tau_y=0.055$ g/cm sec² (5.5×10^{-3} Pa)とする。メッシュは，節点数91 要素数144とした。解析に用いた各係数の大きさは，

$D=4$ m, $L=3000$ m, $U=10$ cm/sec (0.1 m/sec)

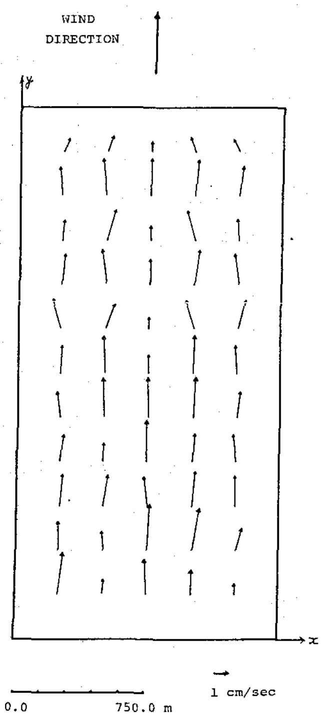
$\tau_0=0.055$ g/cm sec² (5.5×10^{-3} Pa), $f=0.0000874$ 1/sec

$A_V=1.49$ cm²/sec (1.4×10^{-4} m²/sec), $E_V=A_V/fD^2=0.107$

$A_H=370$ cm²/sec (3.7×10^{-2} m²/sec), $E_H=A_H/fL^2=3.3\times10^{-4}$

$R_0=0.38$, $E=1.50\times10^{3}$

である。解析結果を図-1に示す。表面で1.0~3.0cm/sec ($1.0\sim3.0\times10^{-2}$ m/sec)の流速分布が現われており，水表面位も風上から風下に向かって徐々に上昇し，物理的に妥当な結果が得られた。また，このモデリング法を用いて地形の複雑な野尻湖を解析したが，実測値とよく一致した。



図ー1 水表面流速分布

以上のことから，有限要素法による湖水の流動予測に関するモデリング法として次のことを提案する。

① 三次元解析を行なう際に水平方向形状関数に区分的多項式，鉛直方向形状関数に余弦関数を用いる。余弦関数の項数は湖岸や湖底の地形，水深により決定する。

② 湖をメッシュに分割して解析を行なうにあたっては，離散化するスケールを考えねばならない。すなわち，水平方向と鉛直方向で離散化するスケールが異なる場合には，水平渦動粘性係数は水平メッシュスケール，鉛直メッシュスケール比の4/3乗と鉛直渦動粘性係数の積に等しくして解析する。

参考文献

1) 大西亮一・白石英彦，有明海の潮流解析について 第26回 海講 1979.11

2) 松本良一・荒木正夫・富所五郎，FEMによる湖水の流動予測に関する問題点、第2回流れの有限要素法シンポジウム・PP119~126 1980.8

3) 木正夫・富所五郎・松本良一 FEMによる湖流解析 土木学会中部支部研究発表会 PP 72~73 1980.2