I—9　集中衝撃荷重を受ける梁の動的挙動について

信州大学　正員　○石　川　清　志
〃　　〃　　夏　目　正太郎

1．はじめに　本研究は静止している梁に急激な荷重が作用するいわゆる衝撃荷重を受ける梁の動的挙動を調べるための一解析方法を提示するものである．衝撃荷重によって誘起される自由振動の影響が介在する間の過渡現象は梁に作用する衝撃荷重の形態に著しい影響を受ける．過渡現象を調べることは梁の破壊現象に関連して重要な研究問題である．通常解析されている衝撃荷重の形態は時間に依存して一定なステップ関数を与えている．このステップ関数は静止している梁に荷重が瞬時に作用し以後の時間変動に対して変化しない場合に相当する．このときの梁の動的挙動は，衝撃荷重を静荷重とした静的解を中心にして振動運動し，第1波が最大振幅を示す特徴をもつ．ここでは，衝撃荷重の形態が時間中途で任意に変化するステップ関数を与え，これに対する梁の動的挙動を明らかにする．これは静止状態の梁に瞬時に荷重が作用し，以後の時間変動に対して，荷重の大きさが時間中途で変化(ゼロの場合も含む)する場合，あるいは新しい別の荷重が時間中途で載荷される場合に相当するステップ関数である．このような時間中途で変化するステップ関数に対する動的解析はステップ関数の重ね合せによりこれを表現することもできるが，本解析ではステップ関数の変化点において"時間の連続条件"を考慮することにより変化するステップ関数の影響を十分に表現する動的解析である．

2．理論解析　減衰作用の影響を考慮した梁の曲げたわみの運動方程式は

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+h\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{A\gamma}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q \qquad (1)$$

w：曲げたわみ，q：分布外力，EI：曲げ剛性，h：減衰係数，A：断面積，γ：単位重量，g：重力加速度．そして梁の諸物理量をベクトル表示した状態ベクトル$\mathbf{W}$は次式である．

$$\mathbf{W}(x,t)=\begin{bmatrix} w \\ \theta \\ M \\ S \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ -EI\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -EI\frac{\partial^3}{\partial x^3} \end{bmatrix} w \qquad (2)$$

θ：たわみ角，M：曲げモーメント，S：せん断力．いま衝撃荷重の形態は図-1に示すような時間に依存して一定なステップ関数$P(t)$が時刻$t=t_1$で急変するものとする．図-1(a)は$t=t_1$において作用していた荷重の大きさが変化，あるいは別の新しい荷重がさらに載荷した場合のステップ関数に相当し，図-1(b)は作用していた荷重が$t=t_1$において取り除かれた場合に相当するステップ関数である．

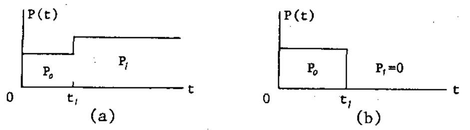

図-1．時間中途で急変するステップ関数

$P(t)$が急変する$t=t_1$を境界にして$P(t)$を時間領域に従って定義する．

$$P(t)=\begin{cases} P_0 & (0<t<t_1) \\ P_1 & (t_1<t) \end{cases} \qquad (3)$$

同様に$P(t)$の影響を受けるwも時間領域に従って定義する．

$$w=\begin{cases} w_0 & (0<t<t_1) \\ w_1 & (t_1<t) \end{cases} \qquad (4)$$

w_0, w_1はそれぞれ式(1)を満足する解である．すなわち

$$\left.\begin{aligned} EI\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}+h\frac{\partial w_0}{\partial t}+\frac{A\gamma}{g}\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}=P_0 \\ EI\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4}+h\frac{\partial w_1}{\partial t}+\frac{A\gamma}{g}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}=P_1 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

さらに$t=t_1$において"時間の連続条件"

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ \dot{w}_0 \end{bmatrix}_{t=t_1}=\begin{bmatrix} w_1 \\ \dot{w}_1 \end{bmatrix}_{t=t_1} \qquad (6)$$

を満足するように誘導すれば式(3)のステップ関数

に対するW_0とW_1の関係が定まる．与えられた梁の境界条件で式(5)をそれぞれ解き，さらに式(6)を満足するように誘導すると，自由振動に表われる固有関数の展開次数nに対して，$0<t<t_1$の領域を支配する未定常数Ω_{0n}と，$t_1<t$の領域を支配する未定常数Ω_{1n}の間で次式の関係が得られる．

$$\Omega_{1n}=\Omega_{0n}+T_n(t_1) \qquad (7)$$

終局的に与えられた初期条件でΩ_{0n}が決定されると，式(7)からΩ_{1n}が求まり，時間中途で急変するステップ関数に対する動的問題は解決される．式(6)の関係が満足されることはこの条件に表われる2種の物理量の連続性だけが満足されるだけでなく，一般に式(2)の状態ベクトルも$t=t_1$で連続性をもつことを意味する．

$$W_0(x,t_1)=W_1(x,t_1) \qquad (8)$$

またステップ関数の急変点が複数個あっても全くさしつかえない．

3．数値計算例　図-2はステップ関数の形態による$\omega(\rho,\tau)$の応答を示したものである．ここでは，無次元座標$\rho=x/L\ (0<\rho<1)$，L：梁の長さ，無次元時間$\tau=t/\mu\ (0<\tau)$，$\mu=\sqrt{A\gamma L^4/(EIg)}$，および無次元減衰係数$\varepsilon=hL^4/(2EI\mu)$を導入して数値計算を行った．なお，梁の初期条件はすべて静止状態を与えた．図-2(a)について解説する．これは両端固定梁の中央点($\kappa=0.5$)に時間中途$\tau=\tau_1$でゼロになるステップ関数で表示される集中衝撃荷重$P(\tau)$を与えたときの応答である．$\tau_1=1.0$の場合は，$P(\tau)$によって振動運動を始め梁の減衰作用によって静止するまでに要する時間に対して$P(\tau)$が比較的長時間載荷したもので，$\tau_1=0.1$は短時間載荷である．$\tau_1=1.0$の振動運動は，$P(\tau)=P_0$を静荷重としたときの静たわみω_pを中心にして減衰振動し，時間経過に従って載荷の状態で静止状態に移行する．ところが$\tau=1.0$でP_0が瞬時に取り除かれることから梁のもつ復元作用により自由振動が誘起され再び振動運動を始め原点を中心にして減衰振動し時間経過に伴って静止状態に移行する．この場合第1波(約$\tau=0.14$)が最大振幅を示し静たわみの約1.4倍(εの値によって異る)であり，固有周期は約0.29(εの値によって異る)である．これに対して$\tau_1=0.1$の場合は，$P(\tau)$が作用し始めて振動運動の第1波が最大振幅に至る前にP_0を取り除くことから$\tau_1=1.0$の場合にみられたω_pを中心とした振動形態にならず，以後原点を中心に減衰振動する．図-2(b)は階段状に変化する$P(\tau)$を固定梁に与え，図-2(c)はパルス状に変化する$P(\tau)$を片持梁に与えたものである．

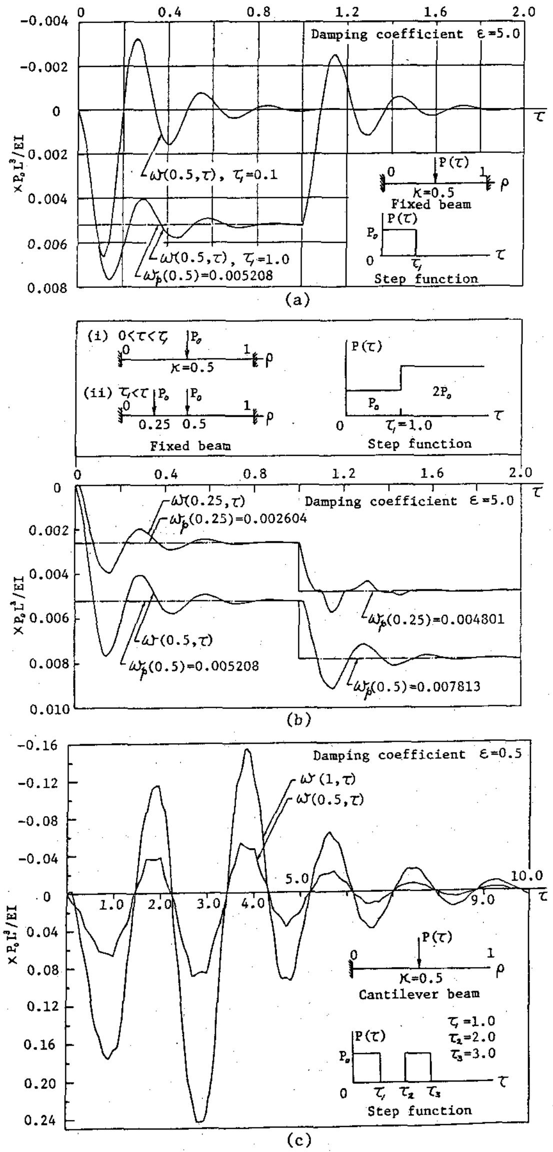

図-2. ステップ関数の形態による$\omega(\rho,\tau)$の応答