

信州大学工学部 正員 奥谷 義

1. まえがき

等時間原則配分問題を取り扱う場合、しばしばリンク容量の制約が存在しなかったり、容量前後で無限大となる非現実的な走行時間関数を採用したりしているが、これらはいずれも実際のではない。これに対して、交通状態を渋滞領域まで広げて考えると、現実との対応で説明のしやすい配分パターンが得られることを筆者らは先に発表している。本研究においては、この渋滞領域を考慮した等時間原則配分理論について、基礎的な問題を整理するとともに、若干の新たな考察を付加する。

2. 等時間原則配分の数理計画問題

等時間配分パターンは、次のような数理計画問題を解くことにより得られることは周知である。

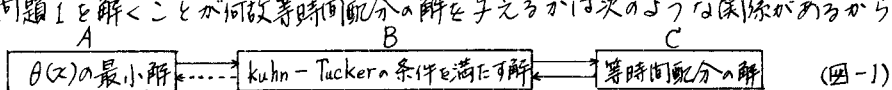
$$(主問題1) \quad \theta(x) = \sum_{j=1}^m \int_{\sum_{i=1}^N x_i^i}^{\sum_{i=1}^N n_i^i} f_j(x_j) dx_j \longrightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i^i - S^i = 0 \quad (i=1 \sim N) \quad (2) \quad x \geq 0 \quad (3)$$

但し、 N : ODペア数、 S^i : OD i の交通量、 n_i^i : OD i の経路数、 x_i^i : OD i の経路 i の交通量

m : リンク数、 x_j : リンク j の交通量、 $f_j(x_j)$: リンク j の走行時間関数、 γ_{ij}^i : OD i の経路 i がリンク j を含むとき1、含まないとき0となる変数、 C_j : リンク容量

この主問題1を解くことが何故等時間配分の解を与えるかは次のような関係があるからである。



ここで、BならばAの関係が点線となっているのは、 $\theta(x)$ が凸関数ならば成立するが、そうでなければ成立しないことを表わそうとしたためである。B $\longleftrightarrow$ Cは $\theta(x)$ の性質如何に拘わらず成立つ。図-1で注意すべきことは、我々が必要とする解はKuhn-Tuckerの条件を満たす解であって、 $\theta(x)$ の最小解そのものではないということである。この点が、等時間配分パターンを求める問題と、いわゆる普通の数理計画問題との大きな相違点である。たとえば、いま目標関数 $F(x)$ が総非効用で、それを最小にする数理計画問題を考えたとき、我々が得たいのは $F(x)$ の最小解そのものであろうか、Kuhn-Tuckerの条件を満たす解ではない。なぜならば、 $F(x)$ が凸でない場合には、後者の解が最小解を与える保証がないからである。しかしながら、等時間配分問題ではCの解を得ることが最終目的であり、またB $\rightarrow$ Cの関係は $\theta(x)$ が凸であるときと否とに拘わらず成立するので、我々はBの解を求めれば、それで必要にして十分ということになるのである。

次に、渋滞領域を考慮した問題の特徴を明らかにするために、図-2に示した簡単な例について考えてみよう。(例1) $f_j(x_j) = a_j x_j + b_j$ (4) としたとき、 $a_1 = 0.04(-0.09)$, $b_1 = 35(235)$

$a_2 = 0.01(-0.08)$, $b_2 = 20(110)$ 但し()内は渋滞領域での値、このとき、リンク

1, 2の容量 C_1, C_2 は $C_1 = 1500$, $C_2 = 1000$ となる。また、 $S = 1425$ とする。

さて、いまリンク2に容量いっぱい交通を配分してみる。このとき $f_2(1000) < f_2(0)$ であるから

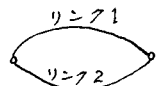


図-2

リンク2はまだ魅力的である。したがって、リンク2はついに渋滞領域に陥り、 $x_1=975$, $x_2=450$ (渋滞) で走行時間が等しくなり、等時間配分パターンが得られる。つまり、リンク2が渋滞領域にある状態で均衡解が得られるということである。さて、この例の場合、ルートは2本しかないから、 $x_1=1425-x_2$ (5) となり、 $\theta(x_2)=-0.02(x_2-450)^2+94537.5$ (6) のように書ける。

これをグラフに書くと図-3のようになる。これをみればわかるように、上記の解は主問題1とは別の関係もない点2(最大解)に対応しており、逆に主問題1の解である最小解 $x_2=1425$ は、 $f_2(1425)=-4$ (7) となることから全く意味のない解になっている。尚、ついでながら示しておく、点1は $x_1=1425$, $x_2=0$ (渋滞) であり、一応等時間パターンを与えるが、 $x_2=0$ (渋滞) となっていることは意味がない。また、点3は、主問題1に容量制約条件を付加した問題を主問題2としたとき、その主問題2の解であり、非渋滞領域のみを考えた主問題2の解とも一致する。従来からよく行われている、容量前後で無限大となる走行時間関数を用いた配分は、この主問題2の近似解を与えるのである。さて、このようなことから、我々は次のようなことがわかる。すなわち、渋滞領域まで考察の対象を広げて等時間原則配分を考えるときには、主問題1の数理計画問題を扱おうことは不都合であるということである。これは、一般にH→Gという仮説は、HであってもGでないといった1つの例を挙げることにより誤りであることが証明されるという数学的常識により、容易に理解できるであろう。

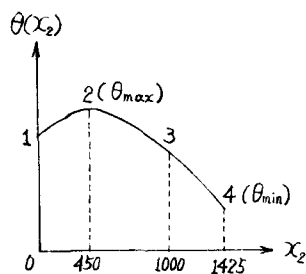


図-3 $\theta(x_2)$ のグラフ

3. 双対問題とその性質
上で述べた不都合をなくすためには、我々は図-3の点2の解を解として扱うような主問題1とは別の数理計画問題を考える必要がある。ここでは、そのために主問題1の双対問題を採り挙げてみる。
(双対問題1) $\varphi(x, u) = \theta(x) + u'g(x) \rightarrow \max$ (8)
 $\nabla\theta(x) + u'\nabla g(x) = 0$ (9) $u \geq 0$ (10)

ここに、 $g(x)$ は式(2), (3)の制約条件をまとめて $g(x) \leq 0$ のように書いたときのベクトル関数、 u は $u = (u_1, u_2, \dots, u_1, u_2, \dots, u_2, u_1, u_2, \dots, u_n, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots, u_n)$ であるとする。さて式(9)より $\sum_{j=1}^m u_j f_j(x_j) \geq \lambda^i (= \lambda^i - \lambda^i)$ (11) また、式(8)は $\varphi(x, u) = \theta(x) + \sum_{i=1}^n \lambda^i s^i - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda^i x_j^i f_j(x_j)$ (12) となる。いま $f_j(x_j)$ を図-4のように非渋滞、渋滞領域ともに凸関数を与えて $f_j(x_j)$

おくとすれば、式(11)は逆凸制約想定を満たすことから、 $\varphi(x, \lambda) (= \varphi(x, u))$ の凸性、非凸性のいかんにかかわらず、その極大解は双対問題1のKuhn-Tuckerの条件を満たす。

すなわち、 $\sum_{j=1}^m u_j \left\{ \frac{df_j(x_j)}{dx_j} \right\} (\nabla_j - \bar{x}_j) = 0$ (13) 但し、 $\nabla_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda^i u_j^i$ (14)

$\sum_{i=1}^n u_j^i = s^i$ (15) $u_j^i (\lambda^i - \sum_{j=1}^m f_j(x_j) u_j^i) = 0$ (16) $u_j^i \geq 0$ (17) なる u_j^i が0

存在する。式(13)において、各リンク両端ノード間の当該リンクのみの経路を考える 図-4 走行時間関数と $\frac{df_j(x_j)}{dx_j} (\nabla_j - \bar{x}_j) = 0$ (18) となり、 $\frac{df_j(x_j)}{dx_j} \neq 0$ (19) から $\nabla_j = \bar{x}_j$ (20) となる。式(20)を式(16)に代入すると、ラグランジュ乗数 u_j^i は等時間配分パターンを与えることがわかる。よって再び式(20)から、極大解 $\bar{x}_j$ は等時間配分パターンを与えることがわかる。上記例の解はこの方法で求まる。

