

金沢大学 正員 小森友明
金沢大学 〇正員 関 平和

1. はじめに 土壌凍結過程等に応用される Stefan, Neumann 問題の数値解析法は近年著しく進歩し、不定形三次元問題に対しても有限差分法や変分不等式による数値解法が高速電子計算機の発達とともに開発されるに至った。しかしながら一般にこの問題は非線形問題であり、解析解の導出が困難なことは良く知られている。本研究では、直角に支切られた土壌が凍結していく過程を数学的に解析し、Rathjen⁴⁾によって提示された凍結面の方程式の超越双曲線表示を行なうことによって比較的簡単な二次元モデルに関して、近似的な解析的手法の適用が可能なることを明らかにしたため、ここに報告する。

2. 理論 表面 $x=0$, $y=0$ が一定温度に保たれる場合、凍結は徐々に内側へ進行し、任意時間における凍結面位置は図-1 に示すごとくである。ここで凍結面位置は $\delta_y(x, \theta)$,

x, y が十分大なる領域での凍結面位置は $\delta_\infty(\theta)$ とする。

a) 基礎式および境界、初期条件

<仮定>

i) 各相における熱的物性値は同一相内において温度に無関係に一定である。

ii) 凍結による体積変化は無視できる。

iii) 凍結は凍結温度で起こり、凍結面はその温度に保たれる。

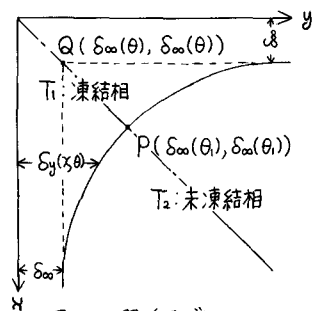


図-1 解析モデル

各相の基礎方程式は

$$\frac{\partial T_1}{\partial \theta} = \kappa_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \right) \quad (0 < x < \infty, 0 < y < \delta_y(x, \theta)) \quad (1) \quad \frac{\partial T_2}{\partial \theta} = \kappa_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \right) \quad (\delta_\infty < x < \infty, \delta_y(x, \theta) < y < \infty) \quad (2)$$

境界条件、初期条件は

$$T_1 = T_0 \quad (x = 0) \quad (3) \quad T_1 = T_0 \quad (y = 0) \quad (4) \quad T_1 = T_2 = T_f \quad (y = \delta_y(x, \theta)) \quad (5)$$

$$\left[\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} - \kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \right] \left(1 + \left(\frac{\partial \delta_y}{\partial x} \right)^2 \right) = \rho L \frac{\partial \delta_y}{\partial \theta} \quad (y = \delta_y(x, \theta)) \quad (6) \quad T_2 = T_i \quad (\theta = 0) \quad (7)$$

b) 特解の導出 いま、凍結相の初期条件と未凍結相の表面温度がそれぞれ仮想的に与えられ、 T_A , T_B であるとき、式(1), (2)の特解はつぎのように与えられる。

$$\frac{T_1 - T_0}{T_A - T_0} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_1 \theta}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa_1 \theta}}\right) \quad (8) \quad \frac{T_2 - T_i}{T_B - T_i} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_2 \theta}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\kappa_2 \theta}}\right) \quad (9)$$

式(8), (9)を式(5)に適合させると、無次元仮想温度 Φ_A , Φ_B は

$$\Phi_A \equiv \frac{T_A - T_0}{T_A - T_0} = \frac{1}{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_1 \theta}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\delta_y}{2\sqrt{\kappa_1 \theta}}\right)} \quad (10) \quad \Phi_B \equiv \frac{T_B - T_i}{T_A - T_i} = \frac{1}{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_2 \theta}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\delta_y}{2\sqrt{\kappa_2 \theta}}\right)} \quad (11)$$

c) 凍結面位置 Rathjen の解法に準じ、凍結面の方程式を $\left[\left(\frac{\delta_y}{\delta_\infty} \right)^m - 1 \right] \left[\left(\frac{x}{\delta_\infty} \right)^m - 1 \right] = C$ (12) と表示

すれば $\frac{\partial \delta_y}{\partial \theta} = \frac{\delta_y}{\delta_\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{\delta_y}{\delta_\infty} \right)^m - 1 \right\} \left(\frac{x}{\delta_\infty} \right)^m \frac{d \delta_\infty}{d \theta} = G(\theta, x, \delta_y)$ (13)

一方、式(6)を式(8)~(11)に適合させると

$$\frac{\partial \delta_y}{\partial \theta} \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial \delta_y}{\partial x} \right)^2} = -\beta \left\{ \frac{\exp\left(\frac{-\delta_y^2}{4\kappa_1 \theta}\right)}{\sqrt{\pi \kappa_1 \theta} \operatorname{erf}\left(\frac{\delta_y}{2\sqrt{\kappa_1 \theta}}\right)} + T^* \frac{\exp\left(\frac{-\delta_y^2}{4\kappa_2 \theta}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_2 \theta}}\right)}{\sqrt{\pi \kappa_2 \theta} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa_2 \theta}}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\delta_y}{2\sqrt{\kappa_2 \theta}}\right) - 1 \right\}} \right\} = g(\theta, x, \delta_y) \quad (14)$$

