

金沢大学 正員 小森友明
金沢大学 ○正員 関 平和

1. はじめに 土壤凍結過程等に応用される Stefan, Neumann 問題の数値解析法は近年著しく進歩し、不定形三次元問題に対しても有限差分法や変分不等式による数値解法が高速電子計算機の発達とともに開発されるに至った。しかしながら一般にこの問題は非線形問題であり、解析解の導出が困難なことは良く知られている。本研究では、直角に支切られた土壤が凍結していく過程を数学的に解析し、Rathjen⁴⁾によって提示された凍結面の方程式の超越双曲線表示を行なうことによって比較的簡単な二次元モデルに関して、近似的な解析的手法の適用が可能なることを明らかにしたため、ここに報告する。

2. 理論 表面 $x=0, y=0$ が一定温度に保たれる場合、凍結は徐々に内側へ進行し、任意時間における凍結面位置は図-1に示すごとくである。ここで凍結面位置は $\delta_y(x, \theta)$, x, y が十分大なる領域での凍結面位置は $\delta_\infty(\theta)$ とする。

a) 基礎式および境界、初期条件

<仮定>

i) 各相における熱的物性値は同一相内において温度に無関係に一定である。

ii) 凍結による体積変化は無視できる。

iii) 凍結は凍結温度で起こり、凍結面はその温度に保たれる。

各相の基礎方程式は

$$\frac{\partial T_1}{\partial \theta} = K_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} \right) \quad (0 < x < \infty, 0 < y < \delta_y(x, \theta)) \quad (1) \quad \frac{\partial T_2}{\partial \theta} = K_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_2}{\partial y^2} \right) \quad (\delta_\infty < x < \infty, \delta_y(x, \theta) < y < \infty) \quad (2)$$

境界条件、初期条件は

$$T_1 = T_0 \quad (x = 0) \quad (3) \quad T_1 = T_0 \quad (y = 0) \quad (4) \quad T_1 = T_2 = T_f \quad (y = \delta_y(x, \theta)) \quad (5)$$

$$\left(K_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} - K_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} \right) \left(1 + \left(\frac{\partial \delta_y}{\partial x} \right)^2 \right) = \rho L \frac{\partial \delta_y}{\partial \theta} \quad (y = \delta_y(x, \theta)) \quad (6) \quad T_2 = T_1 \quad (\theta = 0) \quad (7)$$

b) 特解の導出 いま、凍結相の初期条件と未凍結相の表面温度がそれぞれ仮想的に与えられ、 T_A, T_B であるとき、式(1), (2)の特解はつぎのように与えられる。

$$\frac{T_1 - T_0}{T_A - T_0} = \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{K_1 \theta}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{K_1 \theta}} \right) \quad (8) \quad \frac{T_2 - T_B}{T_B - T_0} = \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{K_2 \theta}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{K_2 \theta}} \right) \quad (9)$$

式(8), (9)を式(5)に適合させると、無次元仮想温度 Φ_A, Φ_B は

$$\Phi_A = \frac{T_A - T_0}{T_f - T_0} = \frac{1}{\operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{K_1 \theta}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{\delta_y}{2\sqrt{K_1 \theta}} \right)} \quad (10) \quad \Phi_B = \frac{T_B - T_0}{T_f - T_0} = \frac{1}{1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{K_2 \theta}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{\delta_y}{2\sqrt{K_2 \theta}} \right)} \quad (11)$$

c) 凍結面位置 Rathjen の解法に準じ、凍結面の方程式を $\left[\left(\frac{\delta_y}{\delta_\infty} \right)^m - 1 \right] \left[\left(\frac{x}{\delta_\infty} \right)^m - 1 \right] = C$ と表示すれば $\frac{\partial \delta_y}{\partial \theta} = \frac{\delta_y}{\delta_\infty} \left\{ 1 + \left(\frac{\left(\frac{\delta_y}{\delta_\infty} \right)^m - 1}{\left(\frac{x}{\delta_\infty} \right)^m - 1} \right) \frac{d \delta_\infty}{d \theta} \right\}$ である。一方、式(6)へ式(8)～(11)を適合させると

$$\frac{\partial \delta_y}{\partial \theta} = -\beta \left\{ \frac{\exp \left(\frac{-\delta_y^2}{4K_1 \theta} \right)}{\sqrt{\pi K_1 \theta} \operatorname{erf} \left(\frac{\delta_y}{2\sqrt{K_1 \theta}} \right)} + T^* \frac{\exp \left(\frac{-\delta_y^2}{4K_2 \theta} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{K_2 \theta}} \right)}{\sqrt{\pi K_2 \theta} \left\{ \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{K_2 \theta}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{\delta_y}{2\sqrt{K_2 \theta}} \right) - 1 \right\}} \right\} = g(\theta, x, \delta_y) \quad (14)$$

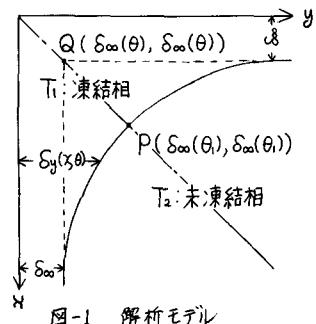


図-1 解析モデル

ここで $\beta = B_1(T_i - T_f) / L \rho$, $T^* = B_1(T_i - T_f) / B_2(T_f - T_0)$ である。式(33)を式(44)へ代入すると、 x についての偏微分項は $\frac{\partial \delta_y}{\partial x} = -\sqrt{\frac{G(\theta, x, \delta_y)}{g(\theta, x, \delta_y)}} - 1$ (15) となる。また、図-1に示すごとく、凍結面は直線 $y=x$ に對して対称であるかが点 $P(\delta_\infty(\theta), \delta_\infty(\theta))$ (ただし $\theta > 0$) において $\frac{\partial \delta_y}{\partial x} = -1$ でなければならぬから、式(15)を -1 と置き変形すると $\frac{G(\theta, \delta_\infty(\theta), \delta_\infty(\theta))}{g(\theta, \delta_\infty(\theta), \delta_\infty(\theta))} = 2$ (16) が得られる。ここで $\delta_\infty = \lambda/\theta$ (λ : 定数) の関係を用いると式(16)は

$$\frac{\lambda \varphi}{2} = -\beta \left(\frac{\exp\left(-\frac{\lambda^2 \varphi^2}{4K_1}\right)}{\sqrt{\pi K_1} \operatorname{erf}\left(\frac{\lambda \varphi}{2\sqrt{K_1}}\right)} + T^* \frac{\exp\left(-\frac{\lambda^2 \varphi^2}{4K_2}\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\lambda \varphi}{2\sqrt{K_2}}\right)}{\sqrt{\pi K_2} \left\{ \left(\operatorname{erf}\left(\frac{\lambda \varphi}{2\sqrt{K_2}}\right)\right)^2 - 1 \right\}} \right) \quad (17)$$

ただし $\varphi = \frac{y}{\theta}$ である。上式から φ が決定されると、任意時間 θ に対して θ の値が一義的に決定され、凍結面の方程式は $\left[\left(\frac{y}{\lambda \theta}\right)^m - 1\right] \left[\left(\frac{x}{\lambda \theta}\right)^m - 1\right] = (\varphi^m - 1)^2$ (18)

このようにして、この問題を近似的に解くことができたが、解析に際して設定した無次元仮想温度 φ 、 φ が時間的、場所的に大きく変化しない場合に近似解が成立する。

3. 数値計算例とその考察 計算例として、初期温度 20°C の土壤の表面が -50°C に保たれて凍結が進行する場合を考える。この場合凍結温度 T_f は水の凍結点 0°C であるとし、物性値は表のごとく設定した。まず Neumann の厳密解法より入力を算出すると、 $\lambda = 0.0357 \text{ m}^{0.5}$ 、また式(17)より $\varphi = 1.151$ と算出される。したがって凍結面の方程式は次式となる。

$$\left\{ \left(\frac{y}{0.0357 \sqrt{\theta}} \right)^m - 1 \right\} \left\{ \left(\frac{x}{0.0357 \sqrt{\theta}} \right)^m - 1 \right\} = (1.151^m - 1)^2 \quad (19)$$

凍結面位置の時間的变化を図-2 に示す。この図より時

間の経過にともない、凍結面の曲率がしだいに小さくなっていく様子が観察される。

さて、 Φ_A 、 Φ_B は式(12)、(17)に代入後、変形するとつぎのように μ (= $\frac{x}{\delta_\infty(\theta)}$) のみの関数となる。

$$\Phi_A = \frac{1}{\operatorname{erf}\left(\frac{\mu \lambda}{2\sqrt{K_1}}\right) \operatorname{erf}\left[\frac{\lambda}{2\sqrt{K_1}} \left(\left(\frac{\varphi^m}{\mu^m} - 1\right)^{1/m} + 1 \right)^{1/m}\right]} \quad (20) \quad \Phi_B = \frac{1}{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\mu \lambda}{2\sqrt{K_2}}\right) \operatorname{erf}\left[\frac{\lambda}{2\sqrt{K_2}} \left(\left(\frac{\varphi^m}{\mu^m} - 1\right)^{1/m} + 1 \right)^{1/m}\right]} \quad (21)$$

μ 対 Φ_A 、 Φ_B のグラフを図-3 に示す。 μ に対する Φ_A 、 Φ_B の相対的变化は小さく、ここで得られた解を十分近似解として適用できることがわかる。

なお、ここでの計算は $m=0.5$ とした場合であるが、 $m=0.5 \sim 8.0$ の範囲で凍結面は m に無関係にほとんど同一であり、 m 入の依存性は無視できるように思われた。

〈使用記号〉

C:	定数	指標1: 凍結相, 指標2: 未凍結相
T: 温度	m: 定数	〈参考文献〉
T ₀ : 表面温度	θ: 時間	1) Carslaw, H.S. and J.C. Jaeger; "Conduction of Heat in Solids", 2nd.ed., Oxford Univ. Press (1959)
T _i : 初期温度	ρ: 密度	2) 柳沢一郎・由川博康: 伝熱法と差分法の併用による低温地下タンクの凍結侵食の数値解析, 土木学会論文報告集, 第272号, pp.93~102 (1978)
T _f : 板材初期温度	K: 热伝導率	3) 菊池昇・市川康明: 变分不等式による Stefan 問題, 土木学会論文報告集, 第289号, pp.17~29, (1979)
T ₀ : 伝熱表面温度	δ _y : 凍結面位置	4) Rathjen, K.A.; Heat Conduction with Melting or Freezing in a Corner" Doctor's thesis (1968)
T _f : 凍結温度	S _{oo} : 凍結面位置	5) 小森友明: 食品凍結に関する伝熱工学的研究, 京都大学博士論文 (1971)
K: 热伝導率	Φ _A : 無次元板想温度	
C _p : 比热	Φ _B : 無次元板想温度	
L: 潜熱	β: パラメータ	
x: 距離	γ: パラメータ	
y: 距離	μ: パラメータ	
T [*] : 無次元温度	λ: パラメータ	

物性値	値	単位	物性値	値	単位
ρ	1500	kg/m ³	L	15.0	kcal/kg
B ₁	0.58	kcal/mhr°C	T _i	20.0	°C
B ₂	0.76	kcal/mhr°C	T ₀	-50.0	°C
C _{p1}	0.32	kcal/kg°C	T _f	0.0	°C
C _{p2}	0.24	kcal/kg°C	λ	0.0357	m ^{0.5} /hr ^{0.5}

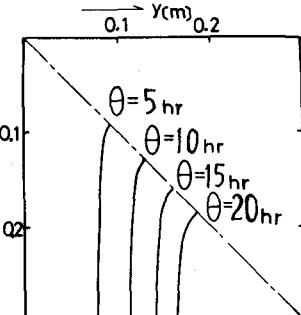
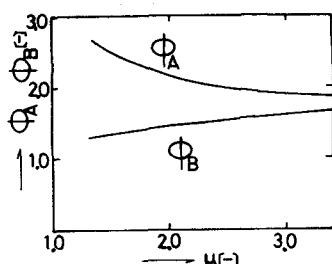


図-2 凍結面の時間的变化

図-3 μ 対 Φ_A 、 Φ_B のグラフ