II—30　　水波の質量輸送に関する一考察

豊橋技術科学大学　正員　足立　昭平
名古屋大学大学院　学生員　○和田　正一

序　湾内の水質分布形成機構において，潮汐残差流の果たす役割は大きい。本報告は，潮汐残差流の発生機構を理論的に考察する第1歩として，Longuet-Higgins による2次元往復流における質量輸送理論の3次元問題への拡張を試みたものである。

1．基礎式　連続式(1)および渦度方程式(2)に，流速 u が微小な無次元量 ε によって級数展開できると仮定して式(3)を代入し，ε および ε^2 オーダーの連続式と渦度方程式を導くと式(4)と(5)および式(6)と(7)のようになる。ここに，$u_1=\{u_1\ v_1\ w_1\}^T$，$u_2=\{u_2\ v_2\ w_2\}^T$ である。

$$\mathrm{div}\ u=0 \quad (1),\qquad \{\partial/\partial t+(u\cdot\mathrm{grad})u-\nu\nabla^2\}\ \mathrm{rot}\ u=\vec{0} \quad (2)$$

$$u=\varepsilon u_1+\varepsilon^2 u_2+\cdots \quad (3)$$

$$O(\varepsilon);\quad \mathrm{div}\ u_1=0 \quad (4),\qquad (\partial/\partial t-\nu\nabla^2)\mathrm{rot}\ u_1=\vec{0} \quad (5)$$

$$O(\varepsilon^2);\quad \mathrm{div}\ u_2=0 \quad (6),\qquad (\partial/\partial t-\nu\nabla^2)\mathrm{rot}\ u_2=-(u_1\cdot\mathrm{grad})\ \mathrm{rot}\ u_1 \quad (7)$$

2．境界条件　図-1の鉛直壁面($y=0$)から十分離れた $y\geq y_{a1}$ (ただし $y_{a1}\ll 2\pi/k$ とする)の領域で波向線が鉛直壁に平行な微小振幅重複長波である場合を想定して，$y=y_{a1}$ での条件を式(8)のように与え，また，鉛直壁面上での条件を式(9)のように与える。ここに，a は振幅，h は静止時の水深，σ は角周波数，k は波数である。

$$\varepsilon[u_1]_{y=y_{a1}}=-(a\sigma/kh)(e^{-ikx}-e^{ikx})e^{i\sigma t}=\varepsilon u_{a1},\quad \varepsilon[v_1]_{y=y_{a1}}=0,\quad \varepsilon[w_1]_{y=y_{a1}}=-i\sigma a(z/h)(e^{-ikx}+e^{ikx})e^{i\sigma t} \quad (8)$$

$$\varepsilon[u_1]_{y=0}=0,\quad \varepsilon[v_1]_{y=0}=0,\quad \varepsilon[u_2]_{y=0}=0,\quad \varepsilon[v_2]_{y=0}=0,\quad\cdots \quad (9)$$

3．境界層内の質量輸送速度　$0\leq y\leq y_{a1}$ の領域を便宜的に境界層と呼ぶ。境界層の水面形は，式(8)を与える $y\geq y_{a1}$ での水面波形 $\eta=-a(e^{-ikx}+e^{ikx})e^{i\sigma t}$ に等しいとし，さらに w_1 が水深方向に直線分布とすれば式(10)が得られる。u_1，v_1 を式(11)のように置いて式(10)とともに式(4)に代入すると式(12)が得られ，解が式(13)となる。以下では，表記を簡単にするために x と t の関数は $u_{a1}=u_{a1}(x,t)$ によって書く。式(5)の z 成分の方程式，すなわち rot u_1 の z 成分 $\zeta_{z1}=\partial v_1/\partial x-\partial u_1/\partial y=\nabla_z^2\psi_1$ についての方程式は式(14)である。$y\geq y_{a1}$ の領域が長波なので，境界層の ψ_1 の x 方向の変化は y 方向の変化に比べて十分小さいとして，x の2階微分の項を無視すると式(15)が得られ，左辺の[ ]内が y に無関係とわかる。そこで，$y=y_{a1}$ での値を用い，$\partial^2\psi_1/\partial y^2\simeq\zeta_{z1}$ より $[\partial^2/\partial y^2(\partial\psi_1/\partial y)]_{y=y_{a1}}=[\partial\zeta_{z1}/\partial y]_{y=y_{a1}}$ で，一方 $y\geq y_{a1}$ では渦度が一定(rot $u_1=\vec{0}$)であることからこの項を無視すると式(16)が得られる。式(16)の解は式(17)となる。式(17)と式(13)を式(11)に代入し，式(8)，(9)の u_1 についての条件を考慮すると式(18)を得る。第1の近似として，$[\partial^n u_1/\partial y^n]_{y=y_{a1}}=0$ $(n=1,2,\cdots)$ となる解，すなわち $C_1=0$，$C_2=0$ の解をとり，式(18)，(13)を式(11)に代入して式(9)の v_1 についての条件を考慮すると式(19)が得られる。式(7)の z 成分の方程式において，rot u_2 の z 成分 ζ_{z2} を x の微分項を無視して $\zeta_{z2}=-\partial u_2/\partial y$ とし，さらに x の2階微分項を無視すると式(20)が得られる。式(20)に式(19)を代入すると右辺は x と y だけの関数となることがわかるの

で，左辺の t および z の微分項を落として y について積分し，式(9) の u_2 の条件を入れると式(21)を得る。 u_2 は式(21)の実部で与えられる。 ここに，$(^*)$ は共役複素数であることを示す。

$$\varepsilon w_1 = (z/h)\partial\eta/\partial t = -ia\sigma(z/h)(e^{-ikx}+e^{ikx})e^{i\sigma t} \tag{10}$$

$$u_1 = \partial\phi_1/\partial x + \partial\psi_1/\partial y,\quad v_1 = \partial\phi_1/\partial y - \partial\psi_1/\partial x \quad ; \quad \phi_1 = \phi_1(x,y,z,t),\quad \psi_1 = \psi_1(x,y,z,t) \tag{11}$$

$$\varepsilon\nabla_2^2\phi_1 = -ia\sigma(e^{-ikx}+e^{ikx})e^{i\sigma t} = -\varepsilon(\partial u_{a1}/\partial x) \quad ; \nabla_2^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 \tag{12}$$

$$\phi_{1a} = -(Y_{(y)}/k^2)\partial u_{a1}/\partial x \quad ; \quad Y_{(y)} = C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky} + 1,\ C_1 \text{ および } C_2 \text{ は定数} \tag{13}$$

$$\{\partial/\partial t - \nu(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)\}(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)\psi_1 = 0 \tag{14}$$

$$\partial/\partial y[\{\partial/\partial t - \nu(\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)\}\partial\psi_1/\partial y] = 0 \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\partial}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}\frac{\partial\psi_1}{\partial y} &= \left[\left\{\frac{\partial}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right\}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right]_{y=y_{a1}} \\ &= (\partial/\partial t - \nu\,\partial^2/\partial z^2)[u_1 - \partial\phi_1/\partial y]_{y=y_{a1}} - \nu[\partial^2/\partial y^2(\partial\psi_1/\partial y)]_{y=y_{a1}} \\ &= -i\sigma(Y_{(y_{a1})} - 1)u_{a1}\end{aligned} \tag{16}$$

$$\partial\psi_1/\partial y = -(C_1 e^{ky_{a1}} + C_2 e^{-ky_{a1}})u_{a1} + \int_{-\infty}^{\infty} X_\beta(x)\, e^{-\alpha y - \beta z + i\sigma t}\, d\beta \quad ; \alpha^2 + \beta^2 = i\sigma/\nu \tag{17}$$

$$\partial\psi_1/\partial y = [-(Y_{(y_{a1})} - 1) + (Y_{(y_{a1})} - 1 - Y_{(0)})e^{-\alpha y}]u_{a1} \quad ; \alpha = (1+i)/\delta,\ \delta = \sqrt{2\nu/\sigma} \tag{18}$$

$$u_1 = (1 - e^{-\alpha y})u_{a1},\quad v_1 = (1/\alpha)(1 - e^{-\alpha y})\partial u_{a1}/\partial x \tag{19}$$

$$\{\partial/\partial t - \nu(\partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)\}(-\partial u_2/\partial y) = -(u_1\cdot\mathrm{grad})(-\partial u_1/\partial y) \tag{20}$$

$$u_2 = (1/4\sigma)\{-3+3i-2ie^{-\alpha^* y} + 2e^{-\alpha y} + (1-i)e^{-(\alpha+\alpha^*)y}\}u_{a1}(\partial u_{a1}^*/\partial x) \tag{21}$$

質量輸送速度の ε^2 オーダーの近似は式(22)で与えられる[1]。 ここに，左辺の $\overline{}$ は1周期平均したことを示す。 式(10)，(19)，(21)を式(22)に代入して x 成分を求めると式(23)となる。 Longuet-Higgins が2次元流れについて得た結果は式(24)であり，両者の違いを見るため $f_H^{(s)}$ および $f^{(s)}$ を図-2に示す。 同図から，2次元流れでは鉛直壁にきわめて近いところで反流を生じるが，式(21)に示された結果は反流を生じないことがわかる。 両者の妥当性を比較する適切な実測例が無いので，目下のところひとつの試算の域を出ないが，今後は上記の計算を手がかりとして，渦度の鉛直方向変化を導入するなど，さらに理論の進展をめざすとともに，実験等により検証していきたいと考えている。

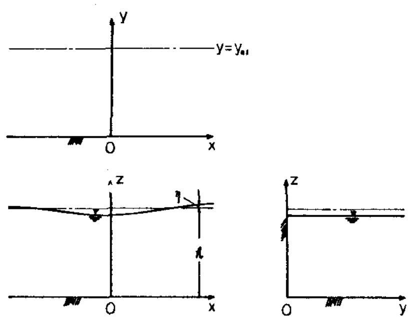

図-1 境界面

$$\overline{U} = \varepsilon^2\left(\overline{u_2} + \overline{\int u_1\, dt\cdot\mathrm{grad}\ u_1}\right) \tag{22}$$

$$\overline{U} = (1/4\sigma)\varepsilon^2 u_{a1}(\partial u_{a1}^*/\partial x)f_H^{(s)}(\mu) \quad ; f_H^{(s)} = -3 + 2e^{-\mu}\sin\mu + 3e^{-2\mu},$$

$$\mu = y/\delta,\quad \varepsilon^2 u_{a1}(\partial u_{a1}^*/\partial x) = \sigma(a/h)^2(\sigma/k)\cdot 2\sin 2kx \tag{23}$$

$$\overline{U} = (1/4\sigma)\varepsilon^2 u_{a1}(\partial u_{a1}^*/\partial x)f^{(s)}(\mu) \quad ; f^{(s)} = -3 + 8e^{-\mu}\sin\mu + 3e^{-2\mu} \tag{24}$$

最後に，執筆にあたって多くの助言を賜わった名古屋大学の中村俊六講師に深謝いたします。

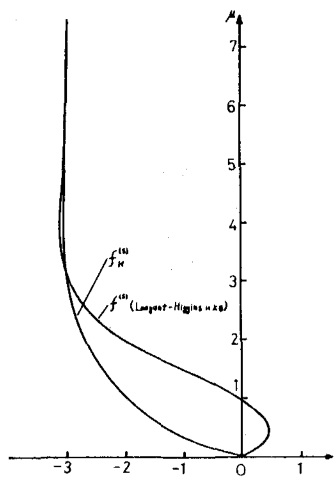

図-2 $f_H^{(s)}$，$f^{(s)}$ のグラフ

〈参考文献〉 1) Longuet-Higgins, M.S. : Mass transport in water waves, Phil. Trans. A. 245, PP. 535－581, 1953.