

山崎大学 正会員 安田 孝志

山崎大学 学生会員 O後藤 真太郎

1. 結 言 本研究は、斜面勾配の影響を明らかに評価したK-dV方程式の数値解を求めることにより、一様傾斜面上における水粒子速度の特性を明らかにしようというものである。

2. 一様傾斜面上における水粒子速度の表示式の誘導 一様な傾斜面上における非回転の波動運動を考え、座標および記号を図1のように定め、角谷になら、流体力学の基礎方程式に次式の変換

$$\xi = \varepsilon^{1/2} \left(\int dx/c_0 - z^* \right), \quad \tau = \varepsilon^{3/2} t^*, \quad \zeta = z^*$$

を適用すれば、オ-次近似において次式の斜面上におけるK-dV方程式を得る。

$$\eta_{\tau\tau} + 3\eta_1\eta_{\xi\xi}/2c_0 + \eta_{1\xi\xi}/6c_0 - B^*\eta_1/4c_0^2 = 0$$

ここに、 $\varepsilon = (h_1/L_1)^2 \ll 1$, $c_0 = \sqrt{1-B^*} = \sqrt{h_1}$, $x^* = x/h_1$, $z^* = z/h_1$, $t^* = t\sqrt{g/h_1}$, $B^* = B/h_1$, L_1 : 初期位置での波長, h_1 : 座標原点での平均水深であり、水面変動 z' と η との関係は次式で与えられる。

$$z'/h_1 = \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \dots \quad (3)$$

このとき、同時に無次元速度ポテンシャル $\Phi^* = \Phi/h_1\sqrt{gh_1}$ についての表示式が得られ、これは次式のように η のみに依存した形で表される。

$$\begin{aligned} \Phi^* = \varepsilon^{1/2} \int_0^{\xi} \eta_1 d\xi + \varepsilon^{3/2} \left\{ -(\zeta^*-B^*)\eta_{1\xi}/2c_0^2 + c_0^2\eta_{1\xi}/2 + \int_0^{\xi} \eta_1^2 d\xi/2c_0^2 + \int_0^{\xi} \eta_2 d\xi \right\} + \varepsilon^{5/2} \left[\eta_{1\xi\xi} \{ (\zeta^*-B^*)^4/24c_0^4 \right. \\ \left. - (\zeta^*-B^*)^2/12 + c_0^2/24 + \eta_1 \{ -(\zeta^*-B^*)B^*/2c_0^2 + (\zeta^*-B^*)B^*/c_0 - c_0B^*/2 \} + \int_0^{\xi} \eta_{1\xi}\eta_1 d\xi \{ (\zeta^*-B^*)^2/c_0^2 - 1/6 \} \right. \\ \left. + \int_0^{\xi} \eta_{1\xi}^2 d\xi \{ (\zeta^*-B^*)^2/c_0^2 - 1/2 \} - \int_0^{\xi} \eta_1^3 d\xi/4c_0^2 + B^* \int_0^{\xi} \left(\eta_1 \int_0^{\xi} \eta_1 d\xi \right) d\xi/4c_0^2 + \eta_{2\xi} \{ c_0^2/2 - (\zeta^*-B^*)^2/2c_0^2 \} \right. \\ \left. + \int_0^{\xi} \eta_1\eta_2 d\xi/c_0^2 + \int_0^{\xi} \eta_3 d\xi + \dots \right] \quad (4) \end{aligned}$$

以下では、上式を用いて斜面上における水粒子速度の特性の究明を試みるのであるが、数値計算に都合の良いように非形の規準化を行なうために次式のような変換を導入する。

$$\eta = (H_1/h_1)Y/\varepsilon = U_5Y, \quad \xi = (c/\sqrt{gh_1})^{-1}\zeta^* \quad (5)$$

これを式(4)に適用し、さらに ζ^* , ζ^* で偏微分すれば、無次元表示の水粒子速度成分 $U^*(x, y)$, $\omega^*(z, y)$ は次式で表される。

$$\begin{aligned} U^* = U/\sqrt{gh_1} = \varepsilon U_5/c_0Y_1 + \varepsilon^2 \left\{ (c/\sqrt{gh_1})^2 U_5Y_{1\xi\xi} \left\{ c_0/3 - (\zeta^*-B^*)^2/2c_0^2 \right\} - U_5^2Y_1^2/4c_0^2 + U_5B^* \int_0^{\xi} Y_1 d\xi/4c_0^2 + U_5Y_2/c_0 \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \left\{ (c/\sqrt{gh_1}) U_5Y_{1\xi} \left\{ 2(\zeta^*-B^*)B^*/c_0^2 - 9(\zeta^*-B^*)B^*/8c_0^2 - 7B^*/8 \right\} + (c/\sqrt{gh_1})^2 U_5Y_{1\xi} \left\{ 7(\zeta^*-B^*)^2/5c_0^2 \right. \right. \right. \\ \left. \left. - 5/4c_0 \right\} + (c/\sqrt{gh_1})^2 U_5^2Y_{1\xi\xi}Y_1 \left\{ 7(\zeta^*-B^*)^2/4c_0^2 - 11/12c_0 \right\} + (c/\sqrt{gh_1}) U_5Y_{1\xi\xi} \left\{ (\zeta^*-B^*)^4/24c_0^4 - c_0^2/24 \right\} \right. \\ \left. - U_5^2Y_1^2/4c_0^2 + U_5^2B^* \int_0^{\xi} Y_1 d\xi - 3U_5^2(c/\sqrt{gh_1}) \int_0^{\xi} Y_1^2Y_{1\xi} d\xi/2c_0^2 + 3U_5^2B^* \int_0^{\xi} Y_1^2 d\xi/4c_0^2 + U_5^2(c/\sqrt{gh_1})^3 \right. \\ \left. \int_0^{\xi} Y_{1\xi}Y_{1\xi\xi} d\xi/6c_0 - U_5^2(c/\sqrt{gh_1})^2 Y_1Y_{1\xi\xi} \int_0^{\xi} Y_1 d\xi/6c_0 \right\} + \dots \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega^* = \omega/\sqrt{gh_1} = \varepsilon^{3/2} \left\{ -U_5(c/\sqrt{gh_1})(\zeta^*-B^*)Y_{1\xi}/c_0^2 + \varepsilon^{3/2} \left[U_5(c/\sqrt{gh_1})^3 Y_{1\xi\xi\xi} \{ (\zeta^*-B^*)^3/6c_0^2 - (\zeta^*-B^*)/6 \} \right. \right. \\ \left. \left. + 2U_5^2(c/\sqrt{gh_1})(\zeta^*-B^*)Y_1Y_{1\xi}/c_0^2 + U_5Y_1 \{ -(\zeta^*-B^*)B^*/c_0^2 + B^*/c_0 \} - Y_{2\xi} \{ (\zeta^*-B^*)/c_0 \} \right] + \dots \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

さらに、水粒子の軌跡は及ぼす斜面勾配の影響を明らかにするため、軌跡の計算に都合の良いLagrange座標での水粒子速度の表示式を導く。式(6), (7)で表されるEuler座標での水粒子速度ベクトル $U(=U_5+U_5\omega)$ とLagrange座標での水粒子の速度ベクトル $W(=U_5+W_5)$ との関係は周知のように次式で表される。

$$\psi(a, t) = \psi(a, \int_0^t \omega(a, \tau) d\tau, y) = \psi(a, t) + (\int_0^t \omega d\tau)^2 \nabla \psi + (\int_0^t \omega d\tau)^2 \nabla^2 \psi / 2 + \dots \quad (8)$$

ここで、 a は一周期 T を N 個に分割し、 T/N ごとの積分計算を行って求められる水粒子の位置でありとし、 T/N の間では $|\int_0^t \omega(a, \tau) d\tau|$ は十分小さいものとする。式(8)の関係を利用すれば、Lagrange座標での無次元表示の水粒子速度成分 $U^*(x, \eta)$ 、 $W^*(z, \eta)$ は次のように表される。

$$U^* = U/\sqrt{gh_1} = \varepsilon C_5 Y_1 / C_0 + \varepsilon^2 \left[(C/\sqrt{gh_1})^2 C_5 Y_1 Y_2 + \{ C_0/3 + (Z^* - B^*)^2 / 2 C_0^2 \} - C_2^2 Y_1^2 / 4 C_0^2 - Y_1 Y_2^2 / C_0^2 \right. \\ \left. + B_2^* C_5 (C/\sqrt{gh_1})^2 \int_0^{\eta} Y_1 d\eta^* / 4 C_0^2 + C_5 Y_2 / C_0 \right] + \dots \quad (9)$$

$$W^* = W/\sqrt{gh_1} = \varepsilon^{3/2} \{ -(C/\sqrt{gh_1}) C_5 Y_1 Y_2^* (Z^* - B^*) / C_0^2 \} + \dots \quad (10)$$

3. 数値解の精度に関する検討

式(2)の数値解の精度については、すでに砕波直前の波に対して十分な精度を持つことを明らかにしている²⁾。ここでは、式(6)および式(7)の水粒子速度の表示式を用いた時の数値解の精度についての検討を行う。図2は、解析解が導かれている一様水深場での水平水粒子速度の鉛直分布に

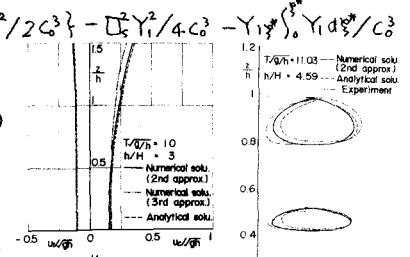


図2. 一様水深場での水平水粒子速度の鉛直分布に関する数値解と解析解との比較

関して解析解との比較を示したものであり、図中の 2nd approx. および 3rd approx. は各々式(6)および式(7)における $O(\varepsilon^2)$ 、 $O(\varepsilon^3)$ に対応している。これから、 ε 2次近似解においては、水深波高 h/H がより大きくなると解析解との相違は全んど無視できる程度になることがわかる。図3は一様水深場での水粒子の軌跡について水

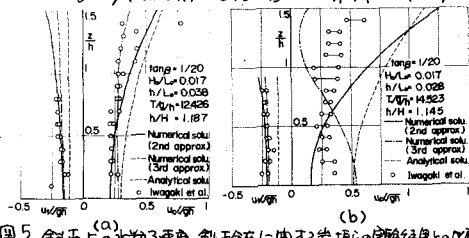
理実験結果および解析解との比較を示したものである。さらに斜面勾配を考慮した時の精度を検討するため、岩垣³⁾による実験結果との比較を行い、その結果を図4および図5に示した。図4はこの時の

波形を示し、図5は水平水粒子速度についての比較を示したものである。これから、砕波長である h/H においては、さすがに実験結果との相違は顕著であるがクノイド波理論に比べれば、なお実験結果とは対応しているといえる。

また、波形自体は良く対応しているにも拘らず内部構造については実験結果との比較から若干精度があることがわかるが、Rankin-Stokes の条件から考えると実験結果は水粒子速度が過大な値を示しているとも言えよう。

4. 一様な斜面上における水粒子速度の計算

図6は、式(6)による斜面上での水粒子速度と、同じ図5. 斜面上の水粒子速度の鉛直分布に関する岩垣らの実験結果との比較



条件下でのクノイド波理論によるそれとの比較を示したものであり、図7はその時のそれと水の波形の比較である。これから、水面変動の絶対値と波形の急峻化に伴う曲率の増大は、水平水粒子速度に大きく影響を及ぼし、直接的ではあるが斜面勾配の影響が波動の場の内部構造にも大きく現われることがわかる。

5. 結語

以上より、一様な斜面上における水粒子速度は波形に大きく依存することが明らかとなった。一様な斜面上の水粒子速度に関する系統的な計算結果は講演時に述べることにする。

参考文献：1) 安田ほか；K-dv方程式による斜面上の波の变形，第26回海論文集，pp21-25 1979

2) 岩垣ほか；斜面上の水粒子速度の鉛直分布について，第18回海論文集，pp93-96 1971

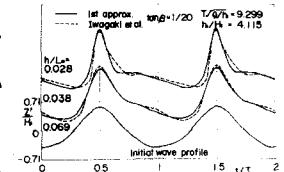


図4. 斜面上での波形に関する岩垣らの実験結果との比較

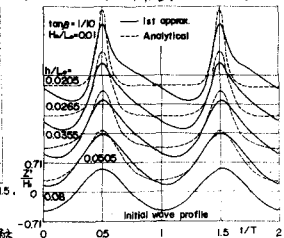


図6. 斜面上での波形変化

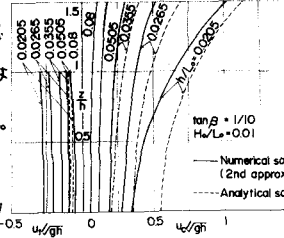


図7. 斜面上での水平水粒子速度の鉛直分布