II—6　浅水域における三次元拡散解析への一提案

信州大学工学部　正　員　○富所　五郎
〃　学生員　宮崎　雅弘

1. まえがき　浅い湖などの浅水域では，水が風などにより流動する時，流れは水面と底では逆向きとなり，何らかの形で鉛直方向の流速分布を考慮した解析法が必要となり，これについては前に述べた[1]。このことは拡散問題についても同様で，流速が鉛直方向にある流速分布を示す時には拡散物質の濃度も鉛直方向に変化し，三次元解析が必要となる。これらの問題の数値解析法としては流動解析と同様に，多層モデル法，三次元的にメッシュを組む方法などが挙げられるが，前者は鉛直方向の拡散係数や層間の物質輸送量の決定が難かしく，また後者は数値安定性，計算時間などで問題点を含んでいる。そこで本研究では，流動解析における文献1)と同様の考えに立ち，水平方向には従来通りの区分的多項式で鉛直方向には三角関数である変数分離型の近似関数を用いるFEMによる三次元解析法を提案するもので，この方法は鉛直方向に連続な近似関数を用いるため数値安定性が良く，また近似関数の直交性により行列の要素の計算量が少ないなどの特徴を有する。

2. 基礎方程式とその有限要素離散化　拡散現象はFickの方程式(1)をといて求められる。

$$\frac{\partial c}{\partial t}+u\frac{\partial c}{\partial x}+v\frac{\partial c}{\partial y}+w\frac{\partial c}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_y\frac{\partial c}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_z\frac{\partial c}{\partial z}\right)+g-K'c \tag{1}$$

ここにCは拡散物質濃度，D_x, D_y, D_zは座標x, y, z軸方向の物質の拡散係数でx, y面は水面内にz軸はこれに直角に上を正として水面を$z=0$とした。またu, v, wはx, y, z軸方向の流速成分，gは単位体積当りの物質流入量，K'は物質の減衰定数である。

つぎに(1)式をGalerkin有限要素法を用いて離散化する。ここで流速成分は物質濃度によらないものとし，流動解析により既に知られているものとする。水底$z=-h$で$u=v=w=0$とすると流速成分u, vはつぎの式によって表わせる[1]。

$$u=U_{pi}\cdot N_i\cdot\cos(A_p\cdot z),\quad v=V_{pi}\cdot N_i\cdot\cos(A_p z),\quad A_p=\frac{2p-1}{2h}\pi,\quad p=1,2,\cdots,m,\quad i=1,2,3 \tag{2}$$

ここに$\cos(A_p\cdot z)$はz方向の基底関数，N_iはx, y面のそれで，ここでは三角形一次要素のものを用いた。またmは流速の自由度，$i=1,2,3$は三角形の頂点を示す。つぎに流速成分wは，連続式$\partial u/\partial x+\partial v/\partial y+\partial w/\partial z=0$の$u, v$に(2)式を代入し，これを$z$方向に$-h$から$0$の区間で積分して求める。物質濃度$C$は(2)式同じ形のつぎの式で表わす。

$$C=C_{p'i}\cdot N_i\cdot\cos(B_{p'}\cdot z),\quad B_{p'}=\frac{p'-1}{h}\pi,\quad p'=1,2,3,\cdots m',\quad i=1,2,3 \tag{3}$$

重み関数を$N_i\cdot\cos(B_{p'}\cdot z)$として(1)式を離散化するが，右辺の初めの3項は部分積分により微分の階数を落して行なう。この時一つの要素についてつぎのようになる。

$$M_{p'q',ij}\cdot\dot{C}_{q'j}+\left(R_{p'q'r,ijk}\cdot U_{rk}+Q_{p'q'r,ijk}\cdot V_{rk}\right)\cdot C_{q'j}=\left(K_{p'q',ij}+R'_{p'q',ij}\right)\cdot C_{q'j}+F_{p'i} \tag{4}$$

ここに・は時間微分を意味し C_{qj} の各係数は(1)式の各項より求まる係数であるが，ここでは紙面の都合上省略する。つぎに時間変数に対する離散スキームとしては Crank-Nicolson型のものを用いた。以上により求まった式を各要素について重ね合せ，得られた方程式を解析条件を考慮してとけば解が得られる。

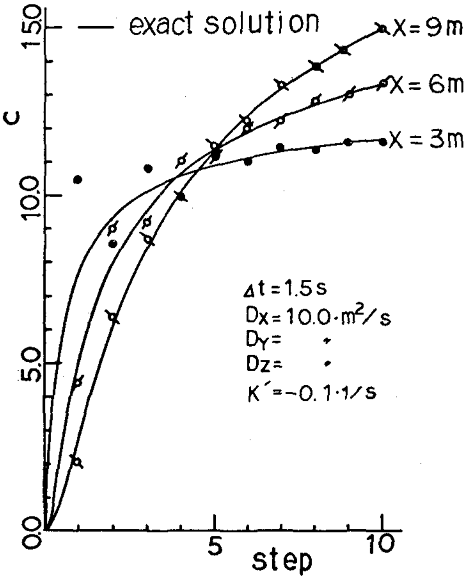

Fig.1 厳密解との比較（$u=2m/s$, $v=0$）

3. 数値計算例およびむすび　まず本解析法の妥当性とプログラムのチェックのため理論解の求められる一次元問題を考えてみる。解析条件は水路幅6m，水路方向に一様な流速 2m/s，水深1mの濃度 $c=0.0$ の水路の原点に $t=0.0$ より $c=10.0$ の物質が断面一様に連続して加えられるものである。[2] 解析メッシュは幅方向に3点，水路方向に原点より33点をとった節点数99，要素数128で流速成分の自由度は $m=6$ とした。この程度の自由度数でz方向の流速分布はほぼ一様であった。濃度の自由度は $m'=5$ としたが，結果によると C_{pi} の値の $p'=2$ 以下の値は $p'=1$ の値に比し非常に小さくz方向の濃度分布はほぼ一様になった。数値解析結果と理論解による厳密値との比較を Fig.1 に示すが，両者の結果は非常によい一致を示していることがわかる。ここで $x=3m$ の点のステップ数の小さいところの解の振動は時間ステップ Δt の選び方によるもので，この値を小さくすることにより除くことができ，本題とは別問題である[2]。つぎに流速成分 u をz方向に $\cos(\pi/2h\cdot z)$ にしたがい変化させた場合の結果を Fig.2 に示す。この場合は理論解は得られず，厳密値との比較はできないが，物理的にみてほぼ妥当な結果と思える。なおここで D_x は，Manning の粗度係数を $n=0.01$ として平均流速より摩擦勾配を求め，Elder の式 $D_x=-0.068hu_*$ より計算した。また $D_z=D_x$ とした。本解析法は，流速成分 v のz方向流速分布を考えることにより浅水域の三次元拡散解析に容易に拡張できるが，これは講演時に発表する。

参考文献

1) 荒木・富所；FEMによる湖流解析への一提案，中部支部研究発表会，1978.2
2) 荒木・富所・小林；拡散問題への有限要素法の応用，信州大学工学部紀要，第44号，1978.7

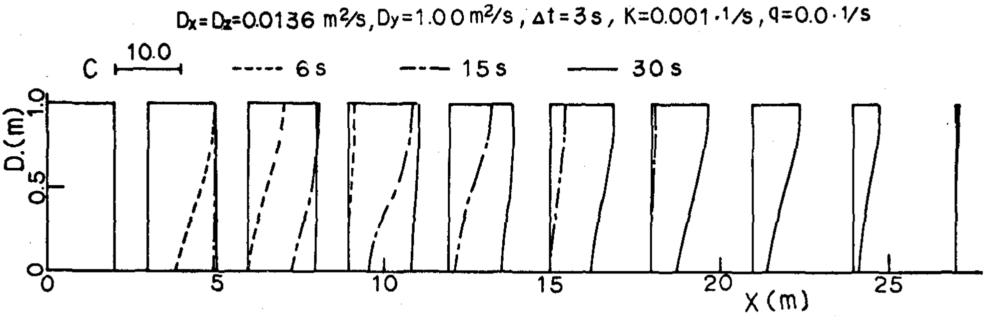

Fig.2 2次元問題の数値解析例（$u=1\cdot\cos(\pi/2h\cdot z)\cdot m/s$, $v=0$）