Ⅱ―5　　　ＦＥＭによる湖流解析

信州大学工学部 正員　荒木正夫，富所五郎
大学院 学生員○松本良一

Ⅰ．序

近年，FEMを用いた流体解析が盛んに行なわれており，特に最近では三次元解析がその中心的位置を占めつつある。湖流解析においても二次元解析は，ほぼやり尽くされた感があり，現在は種々の三次元解析モデルを使った研究が行なわれている。モデルをタイプ別に分類すると，(1)鉛直方向に多層に分割し，層内で二次元解析を行なう多層モデル，(2)鉛直方向粘性項，圧力項，コリオリ項の釣り合いとして鉛直流速分布を利用するエクマンタイプモデル，(3)三次元メッシュを用いた三次元モデルが上げられる。しかし，多層モデルでは各層間のせん断応力をいくらにするかという点で問題があり，エクマンタイプモデルではRossby numberの大きい湖には適用できず，そして三次元モデルでは節点数が多くなり計算時間・記憶容量の点で問題がある。以上(1)(2)(3)のモデルの難点を解決する手法として本研究では，試験関数に水平方向には区分的多項式を，鉛直方向には境界条件を考慮した余弦関数を用いた。これによって少ない節点数で三次元解析を行なうことが可能となり，基底関数として境界条件も考慮したものを使用しているので，解析精度の向上が期待できる。

Ⅱ．基礎方程式と有限要素法への離散化

流れを支配する基礎方程式は，

$$\partial u/\partial t + R_o(u\,\partial u/\partial x + v\,\partial u/\partial y + w\,\partial u/\partial z) = -E\,\partial p/\partial x + E_V\,\partial^2 u/\partial z^2 + E_H(\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2) + v \quad (2\cdot1)$$

$$\partial v/\partial t + R_o(u\,\partial v/\partial x + v\,\partial v/\partial y + w\,\partial v/\partial z) = -E\,\partial p/\partial y + E_V\,\partial^2 v/\partial z^2 + E_H(\partial^2 v/\partial x^2 + \partial^2 v/\partial y^2) - u \quad (2\cdot2)$$

$$\partial w/\partial t + R_o(u\,\partial w/\partial x + v\,\partial w/\partial y + w\,\partial w/\partial z) = -Q(\partial p/\partial z + 1) + E_V\,\partial^2 w/\partial z^2 + E_H(\partial^2 w/\partial x^2 + \partial^2 w/\partial y^2) \quad (2\cdot3)$$

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0 \quad (2\cdot4)$$

境界条件として，湖底面$z=-H$で$u=v=w=0$，水面$z=\eta$で$\partial u/\partial z=\tau_x$，$\partial v/\partial z=\tau_y$とする。

ここで，x軸を東に，y軸を北に，z軸を静水面位を0として鉛直上向きに取り，各方向の速度をu，v，wとした。τ_x・τ_yはせん断応力である。R_oはRossby number $=U/fL$，E_Vはvertical Ekman number $=A_V/fD^2$，E_Hはhorizontal Ekman number $=A_H/fL^2$，F_rはFroude number $=U/\sqrt{gD}$，そしてEはR_o/F_r^2，QはgL/fUDである。また上記のU，L，D，f，g，A_V，A_Hは各々，代表流速，代表水平寸法，代表水深，コリオリ係数，重力加速度，鉛直混合係数，水平混合係数を表わす。以上の諸量に値を代入すると，(2・3)式では右辺第1項が非常に大きいのでこれのみを扱いz方向に積分すると，$p=-z+\eta$となる（但し，大気圧を0とする）。

次に，基礎方程式を有限要素法へ離散化する。流速の基底関数として水平方向には区分的多項式を，鉛直方向へは余弦関数を用いる。時間方向への離散化としてはtwo-step laxwendroff法を用い，初期条件と境界条件のもとにstep-by-stepに解析した。

近似関数を，$u = N_i \cos A_p z \cdot u_{pi}$，$v = N_i \cos A_p z \cdot v_{pi}$，$\eta = N_i\,\eta_i$　(2・5)

$A_p = (2P-1)\pi/2h$　　$p = 1, 2, \cdots m$　　として離散化した式は，

$$M_{pq,ij}\dot{U}_{qj}+R_{pqr,ijk}U_{qj}U_{rk}+Q_{pqr,ijk}V_{qk}U_{rk}=E1_{p,ij}\,\eta_j+K_{pq,ij}U_{qj}+C_{pq,ij}V_{qj}+f1_{p,j} \quad (2\cdot6)$$

$$M_{pq,ij}\dot{V}_{qj}+R_{pqr,ijk}U_{qj}V_{rk}+Q_{pqr,ijk}V_{qj}V_{rk}=E2_{p,ij}\,\eta_j+K_{pq,ij}V_{qj}-C_{pq,ij}U_{qj}+f2_{p,j} \quad (2\cdot7)$$

$$M_{ij}\,\dot{\eta}_j+K1_{q,ij}U_{qj}+K2_{q,ij}V_{qj}=0 \quad (2\cdot8)$$

である。

Ⅲ. 解析対象

本研究で解析を行なった湖は，長野県北部にあり避暑地として有名な野尻湖についてである。野尻湖は，周囲が山に囲まれており，山腹の傾斜がそのまま湖中へ続く，山間部によく見られる湖である。最大水深は約40mで代表水平寸法は約3kmである。一般に野尻湖のような見かけ上深いと思われる湖では，湖中の或る水深で躍層が存在しており，図1では7月下旬に現われている。しかし，冬期の12月下旬には躍層が消滅し，一層状態に戻ってしまう。本研究では，躍層が消滅した冬期の一層状態について解析を行なった。

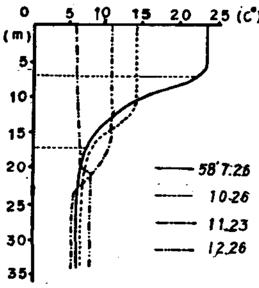

図-1 鉛直方向温度分布

Ⅳ. 数値解析結果と結論

解析条件としては，南東の方向から風速2m/secの風が，湖面全体に一様に吹き続ける。外部への流入・流出が無く，$-\tau_x=\tau_y=0.039\,g/cm\cdot sec^2$の場合を考える。メッシュは，節点数187・要素数292とした。最初に鉛直方向の試験関数を$m=2$の場合を行なったが，物理的に不合理な結果が現われた。これは，水平方向への近似精度は三角形要素の分割方法によって向上させ得るが，鉛直方向の近似精度は完備性により余弦関数の項数に依存している。そのため$m=2$では不足であった。次に$m=3$とすると，表面水位が風下から風上に向かって徐々に盛り上がり，表面流速も大体実測と一致した。このようにmの数を僅か1項増やしただけであるが，解析精度が上がった理由として，余弦関数が境界条件を盛り込んだモードとしての役割を果しているためと考えられる。この点で従来行なわれている三次元解析モデルより，少ない節点数や条件で解析精度を向上させ得たと思われる。また，解析解が求まる定常計算として文献1)の方法で解析を行なった。野尻湖でも鉛直方向にエクマンスパイラルが存在し，流速分布も吹送方向に対して右廻りの様子を呈し，湖の流動特性にもコリオリ力が影響していると判断した。以上のことからFEMによる湖流解析は，数値実験としての精度が十分期待でき，湖流の流動特性を予測し得るに有効であると思われる。尚，本計算には信州大学データステーションを通じて，東京大学大型計算機 HITAC 8800/8700 を利用した。

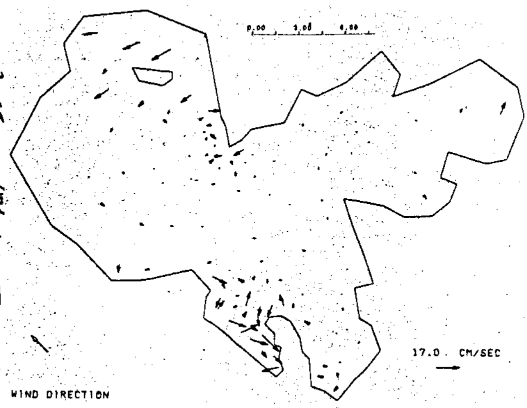

図-2 平均流速

参考文献

1) 余越正一郎・富所五郎；風による諏訪湖の流動特性，土木学会論文報告集第276号 1978.
2) Cheng, R.T., "TRansient Three-Dimensional Circulation of Lakes." Journal of The Engineering Mechanics Division, ASCE, no.EM1 February 1977.
3) T.J. Chung: Finite Element Analysis in Fluid Dynamics Mc. GRAW-Hill 1978