

名古屋大学 正員

福本 秀士

名古屋大学 学生員

○草間 晴幸

1. はじめに 板の大変形弾塑性解析は、解析手法の発達および大型計算機の出現に伴い、多くの研究がなされてきた。しかし、それらの大部分は荷重が単調載荷の場合であり、繰返し荷重が作用した場合についての数値計算的検討はあまりなされていない。この認識に基いて、本論文は繰返し荷重が作用する板の挙動について研究するものである。

2. 解析手法 本論の解析手法は文献[1]に詳しい（この論文は本来、単調荷重の場合を目的としている）が、ここで概略を説明する。なお、この手法を用いた理由は、基礎方程式中に塑性変形に関する非線形関数が導入されていて、負荷-除荷過程の塑性に関する物理量が把握しやすいからである。

板に関する von Karman の基礎方程式の時間微分型は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{M}_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \dot{M}_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \dot{M}_y}{\partial y^2} &= -\dot{Q}_0 - \left(\dot{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dot{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \dot{N}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_x \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \dot{E}_{xy}}{\partial x \partial y} &= 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

塑性ポテンシャルを f ，塑性変形中変化する比例定数を μ ，Airy の応力関数を ϕ とすると、中央面の歪速度および、断面力の時間微分は弾性部分と塑性部分が分離されて次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= \dot{E}'_x + \dot{E}''_x = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \dot{\phi}}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \dot{\phi}}{\partial x^2} \right) + \mu \frac{\partial f}{\partial n_x} \\ \dot{E}_y &= \dot{E}'_y + \dot{E}''_y = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \dot{\phi}}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \dot{\phi}}{\partial y^2} \right) + \mu \frac{\partial f}{\partial n_y} \\ \dot{E}_{xy} &= \dot{E}'_{xy} + \dot{E}''_{xy} = \frac{2}{E} (1+\nu) \frac{\partial^2 \dot{\phi}}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial f}{\partial n_{xy}} \end{aligned} \right\} \quad (2) \quad \left. \begin{aligned} \dot{M}_x &= -D \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} \right) - \frac{4D}{k} \mu \left(\frac{\partial f}{\partial n_x} + \nu \frac{\partial f}{\partial n_y} \right) \\ \dot{M}_y &= -D \left(\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x^2} \right) - \frac{4D}{k} \mu \left(\frac{\partial f}{\partial n_y} + \nu \frac{\partial f}{\partial n_x} \right) \\ \dot{M}_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial x \partial y} - \frac{2D(1-\nu)}{k} \mu \frac{\partial f}{\partial n_{xy}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(2)，(3)を式(1)に代入して、0から t まで時間積分すると式(4)は、

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} \left\{ Q_0 + k \pi(x, y) \right\} - \frac{4}{k} \int_0^t \psi(x, y) dt, \quad \nabla^4 \phi = E \left\{ \Lambda(x, y) - \int_0^t \Gamma(x, y) dt \right\} \quad (4)$$

となる。ここで $\pi(x, y)$ ， $\Lambda(x, y)$ は膜作用に関する非線形関数， $\psi(x, y)$ ， $\Gamma(x, y)$ は塑性変形に従属する関数である。 w ， Q_0 ， ϕ ， π ， Λ ， ψ ， Γ 全てを二重フーリエ級数に展開し、板の境界条件を偶点拘束のみに限定すると、 w と ϕ は最終的に次式のように閉じた解となる。

$$w = \frac{16}{kE} \left[\frac{1}{D} \left\{ 8F_0 + k \sum_j \pi_{jj} F_j \right\} - \frac{4}{k} \sum_i \sum_l (\mathcal{F}_i)_L F_i \right], \quad \phi = \frac{16E}{\pi^2} \left\{ \sum_j \Lambda_j F_j - \sum_i \sum_l (\Gamma_i)_L F_i \right\} \quad (5)$$

ここで、添字 i, j は分割領域を表わし、 L は時間積分を荷重段階における和分に置換したので、その各荷重段階に対する和を示している。 F_0 ， F_i は影響係数であり、各分割領域の中心点座標を定めることによって、あらかじめ計算することができる。以下、計算例は式(5)を用いることになるが、分割数による解の精度の照査は済んでおり、板全体を 9×9 の領域に分割することにする。

3. 例題

簡単な解析例として、正方形板 ($a=100\text{cm}$, $h=1.6\text{cm}$) に等分布満載荷重が作用する場合を示す。荷重は $\delta/\delta_{eo}=0$ から $\delta/\delta_{eo}=2.1$ まで増加し、続けて $\delta/\delta_{eo}=0$ まで除荷する。ただし、 δ_{eo} は弾性限界荷重である。図-(2)は塑性領域の進展図であり、上段が負荷過程、下段が除荷過程である。図から分かるように、同じ荷重でも負荷過程、除荷過程の違いにより、塑性領域の広がり異なる。その理由を説明すると、例えば (1,3) 領域は、 $\delta/\delta_{eo}=2.09$ の段階では弾性領域であり、 $\delta/\delta_{eo}=2.10$ の段階で塑性領域にはいる。そして $\delta/\delta_{eo}=2.09$ に除荷された場合、式(4)の第1式では右边第3項、第2式では、右边第2項が時間積分のため、この間にも、塑性領域における非線形関数に変化し、その影響で $\delta/\delta_{eo}=2.09$ の段階でも、塑性状態を保つことになる。図-(1)は荷重-たわみ曲線を示している。荷重が0になっても残留変形が生じていることがわかる。残留変形の大さは、 $\delta/\delta_{eo}=2.10$ 時の弾性たわみ曲線と弾塑性たわみ曲線との差、ほぼ2倍程度となる。なお、塑性ポテンシャルとしては *Massonnet* の提案した、曲げ応力と膜応力を分離した近似降伏曲面を用いている。文献[2]にこの近似曲面の精度について検討がなされていて、文献[3]にも使用されているが、文献[4]では塑性ポテンシャルに対する曲げ応力の寄与が増加されていて、負荷過程においても塑性領域の進展がわずかに異なる。この問題も含めて、さらに詳しい検討を行なうつもりである。

【参考文献】 [1] 岡村, 他. 土論集 No.196. pp. 29~43. [2] *Massonnet Ch. General theory of elastoplastic membrane plates, Engineering Plasticity, Cambridge Univ. 1968* [3] 馬場, 他. 土論集 No.286 pp. 11~20. [4] 上田, 他. 日本造船学会論文集 No.146 pp. 323~329.

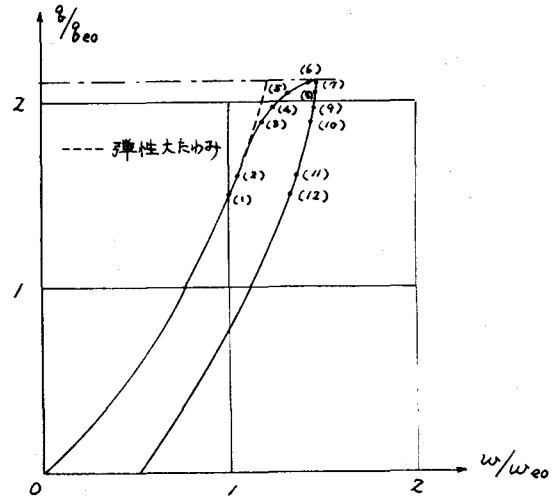


図-(1)

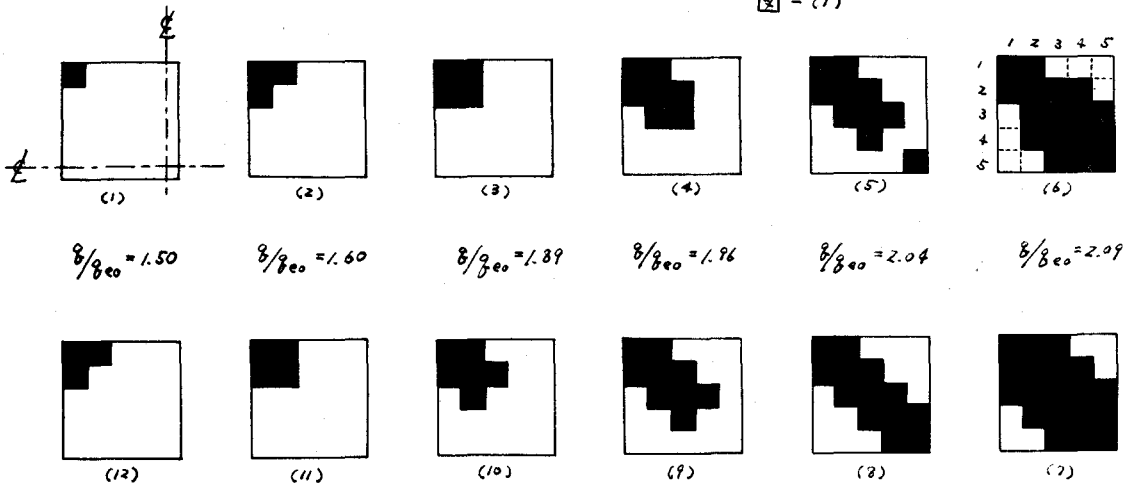


図-(2)