I —18　　曲げ剛さが直線変化する長方形板の曲げたわみに関する研究

岐阜大学大学院　学生員　○井上敏夫
岐阜大学工学部　正会員　中川建治

1．まえがき

4辺単純支持変厚板の曲げたわみに関する研究[1]を少し拡張して，ここでは，相対する2辺が単純支持，残りの2辺は境界条件を自由に変えることができる長方形板で曲げ剛さが1方向に1次変化する場合の理論解を得ている。そこで，この解析方法の概要を述べるとともに，計算例を示して差分法および後述の近似解法による計算結果との比較をすることによってこの解が妥当であることを示す。

2．解析方法

曲げ剛さが1次変化する薄板の微分方程式は次のように表わされる。

$$\nabla^2(D\nabla^2 w) = q(x, y) \qquad (1)$$

ここにDは板の曲げ剛さであってx，yの1次関数である。(1)式の同次解は，$z = x + iy$，$\bar{z} = x - iy$ という変数変換により形式的には，

$$w = \iint \frac{1}{D(x)}(f_0(z) + g_0(\bar{z}))\,dz\,d\bar{z} + f_1(z) + g_1(\bar{z}) \qquad (2)$$

となる。ここで板の曲げ剛さDが1方向にのみ変化するとして，これの逆数をフーリエ級数に展開する。すなわち，

$$\frac{1}{D(x)} = \frac{1}{D_0(1-\alpha x)} = \frac{1}{D_0}\cdot\left(v_0 + \sum_{m=1}^{\infty} v_m \cos\frac{m\pi}{\ell}x\right) \qquad (3)$$

とする。そして，(2)式に $f_0(z) = e^{sz}$，$f_1(z) = v_0 z e^{sz}/sD_0$，$g_0(\bar{z}) = 0$，$g_1(\bar{z}) = 0$ を代入すると次の解が得られる。

$$\begin{aligned} w = {} & C_1 e^{sx}\cos sy + C_2 e^{-sx}\cos sy \\ & + C_3 e^{sx}\left[\frac{v_0}{s}x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{v_m}{\beta_m(s^2+\beta_m^2/4)}\left(s\sin\beta_m x - \frac{\beta_m}{2}\cos\beta_m x\right)\right]\cos sy \\ & + C_4 e^{-sx}\left[\frac{v_0}{s}x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{v_m}{\beta_m(s^2+\beta_m^2/4)}\left(s\sin\beta_m x + \frac{\beta_m}{2}\cos\beta_m x\right)\right]\cos sy \end{aligned}$$

ここに，$\beta_m = \frac{m\pi}{\ell}$ で $C_1 \sim C_4$ は積分定数である。

この解法において注目すべき点は，板の曲げ剛さをフーリエ級数に展開していることであるが，注意すべきこととして，(3)式のフーリエ係数 v_m を求める段階で数値積分を用いなければならず，この解を完全解とは呼べないことである。

3．計算例

ここでは，相対する2辺が単純支持，第3辺が自由，第4辺が固定された長方形板が等分布荷重を受ける場合

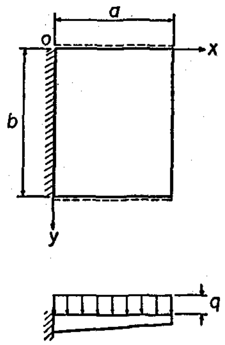


図-1

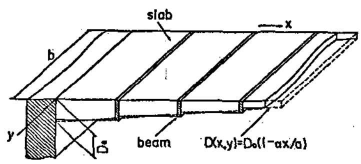


図-2

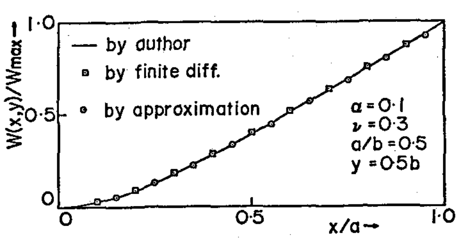


図-3

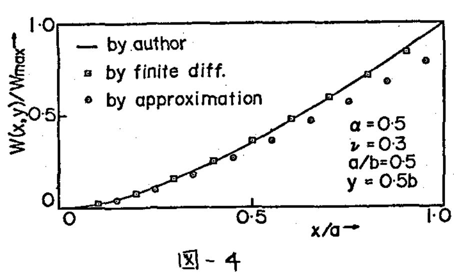
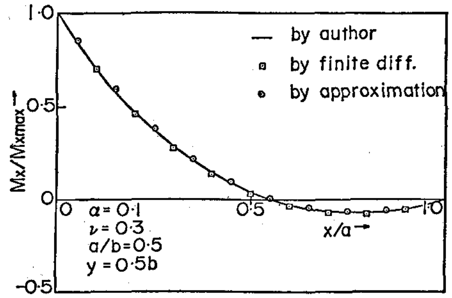


図-4

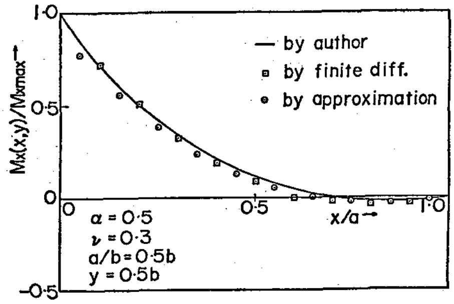
を考える（図１）。ポアソン比は，$\nu=0.3$と仮定し，曲げ剛さをフーリエ級数に展開するための数値積分としては，Simpsonの数値積分法を用い分割数は40としている。またフーリエ級数は第10項まで計算している。一方，差分法ではx方向に10分割，y方向には8分割している。そして，近似解法として連続スラブのプログラムを利用している。つまり連続スラブを各パネルごとに曲げ剛さを変えて階段状に近似させるのである（図２）。この場合，境界条件を満足させるために固定辺では充分に大きな断面の桁を配置し，他の桁断面は非常に小さいものとしている。

図３～８は，辺長比$a/b=1/2$として$y=b/2$線上のたわみおよび曲げモーメントを上の３つの解法によって求めたものである。比較を容易にするために最大点の値を１としている。曲げ剛さの変化の小さいときはよく一致しているが（図3,5,7），変化の大きいときは近似解法による結果はあまり一致しなくなる（図4,6,8）。これは，パネル数が少いために充分に近似されていないためと思われる。図９～11には，さらに板の辺長比a/bと曲げ剛さの変化率αを変えた場合の$x=a$，$y=b/2$点におけるたわみとy方向の曲げモーメント，そして$x=0$，$y=b/2$点におけるx方向曲げモーメントについて理論解と差分解による計算結果を示した。

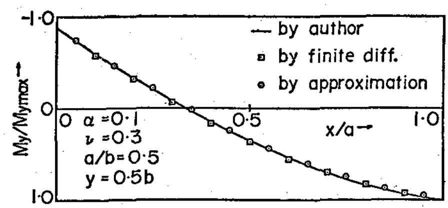
〈参考文献〉1）中川：4辺単純支持変厚板の曲げたわみに関する研究，土木学会論文報告集第249号・1976年5月



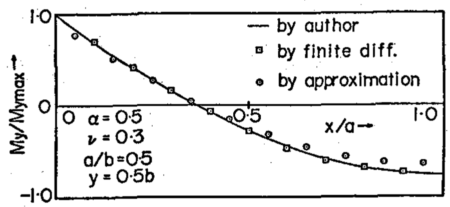
図－５



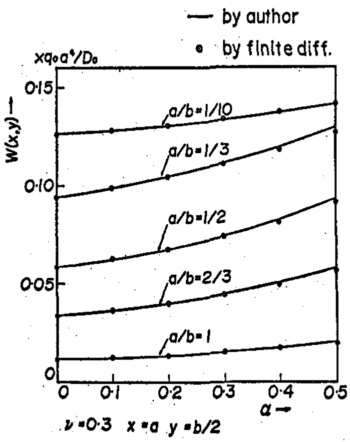
図－６



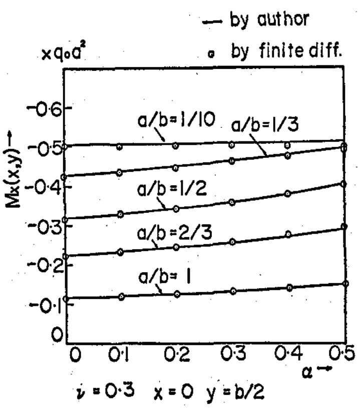
図－７



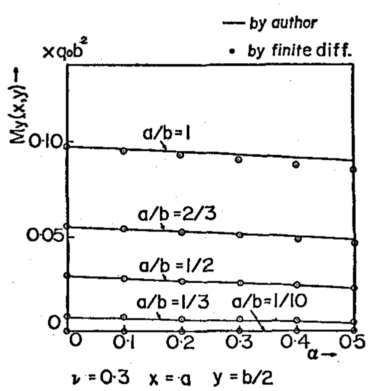
図－８



図－９



図－10



図－11