I —12　　数値ラプラス逆変換法による粘弾性はり，板の衝撃応答

信州大学　工学部　学生員　○大上俊之
信州大学　工学部　正員　草間孝志
信州大学　工学部　正員　三井康司

I．まえがき

動的問題にラプラス変換は広く利用されており，また，線形粘弾性問題は「弾性・粘弾性の対応原理」を用いると，ラプラス面における弾性問題に帰着される。本報告は，数値ラプラス逆変換法の粘弾性体の動的問題への適用を試みたものである。数値計算例として，粘弾性材料から成るティモシェンコばり，および平板の振動を取り扱い，材料特性は，体積変形は弾性，せん断変形の緩和弾性率をMaxwell型，Kelvin型，3要素固体と仮定した。

II．数値ラプラス逆変換

(1).高速フーリエ変換による数値ラプラス逆変換

$F(S)$ が $f(t)$ のラプラス変換とすれば，逆変換は次式で定義される。

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty}F(S)e^{st}ds \tag{1}$$

ここに r は $Re[S]<r$ で $F(S)$ が正則となる実数。変換変数 S を $S=r+i\eta$ とおくと上式は

$$f(t)=\frac{e^{rt}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\eta t}F(r,\eta)d\eta \tag{2}$$

となる。いま，$f(t)e^{-rt}=g(t)$，$F(r,i\eta)=G(\eta)$ とおくと式(2)は

$$g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\eta t}G(\eta)d\eta \tag{3}$$

このとき，$F(S)$ は

$$F(S)=G(\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\eta t}g(t)dt \tag{4}$$

となり，$f(t)$ と $F(S)$ に関するラプラス変換は $g(t)$ と $G(\eta)$ のフーリエ変換と考えることができる。式(3)を有限フーリエ変換

$$g(t)\fallingdotseq\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{N-1}G(\eta_n)e^{i\eta_n t}\Delta\eta \tag{5}$$

で近似することによって，$f(t)$ を決定することができる。類似の方法が文献[3]に示されている。

(2).Schmittrothによる方法[1]

式(1)を三角関数で表示すれば

$$f(t)=\frac{e^{rt}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}F(r,\eta)\left\{\cos\eta t+i\sin\eta t\right\}d\eta \tag{6}$$

であるが，$Re[F(S)]$ および $Im[F(S)]$ が η についてそれぞれ偶関数，奇関数であること，また $t<0$ で $f(t)=0$ であることを考慮すると，式(6)は最終的に

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{2e^{rt}}{\pi}\int_{0}^{\infty}Re[F(S)]\cos\eta t\,d\eta\\&=-\frac{2e^{rt}}{\pi}\int_{0}^{\infty}Im[F(S)]\sin\eta t\,d\eta\end{aligned} \tag{7}$$

となる。ただし，Re[ ]，Im[ ]はおのおの実数部，虚数部を意味する。式(7)はこのままの形では，t が大きな値のときに普通の数値積分法では大きな誤差を生じるものと思われるので，式(7)第1式において，$\eta=\pi u/t$ と変数変換して次のようにサイクルごとに積分する。

$$f(t)=e^{rt}\frac{2}{t}\left\{\int_{0}^{1/2}+\int_{(2n-1)/2}^{(2n+1)/2}\right\}\times Re[F(r,i\frac{\pi}{t}u)]\cos\pi u\,du \tag{8}$$

式(7)の第2式についても同様である。なお，丸谷ら[1]がSchmittrothの方法を応用して，熱衝撃の問題を解析している。

III. 数値計算例

粘弾性材料から成るティモシェンコばりが $t=0$ で初速度をうける場合の自由振動，および中央点に集中荷重が作用した場合のティモシェンコばりと粘弾性平板の強制振動について考える。いずれも境界条件は単純支持の場合を考え，計算には時間について $T=\omega_{E1}t$，材料特性として $\tau\omega_{E1}$ なるパラメーターを用いて無次元計算を行なった。ここに，ω_{E1} は弾性の場合の一次振動に対する固有円振動数であり，τ は粘性係数とヤング率との比である。図1にはりの自由振動，図2および図3にはりと平板の強制振動の場合の，中央点のたわみの時間的変化を示す。○印は弾性時における厳密解である。

IV. まとめ

(1). Schmittrothによる方法，高速フーリエ変換による方法とも，いずれの場合もよい一致を示した。

(2). 高速フーリエ変換による方法の場合は，r の値によって精度が大きく左右される。経験的には，$rt_{N-1}\doteqdot 8$ とする場合が最も精度が良い。

(3). Schmittrothによる方法の場合は，r の値が大きくなると(およそ10以上)，t の大きいところでは精度は悪くなる。

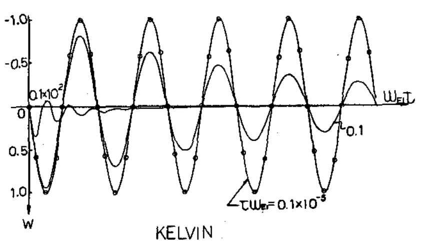
(4). 平板，はりのいずれの場合も，材料特性がMaxwellモデル，3要素固体では $\tau\omega_{E1}=0.1\times10^{7}$，Kelvinモデルでは $\tau\omega_{E1}=0.1\times10^{-5}$ 程度の値になると弾性解と一致し，減衰はせず粘性の影響はみられなかった。

(参考文献)

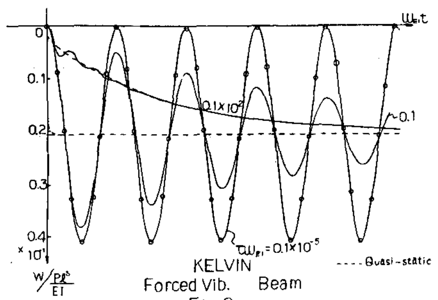
1). Schmittroth. L. A : Communication of the ACM, 3－3 (1960), 171

2). 台丸谷，内藤：熱衝撃を受ける半無限体の過渡的挙動の解析，日本機械学会論文集(第1部) 39巻 318号，1973年 2月

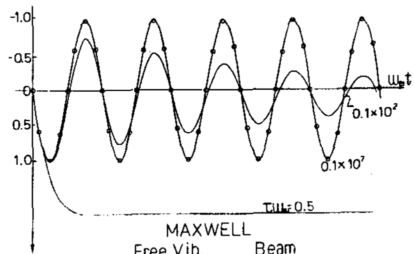
3). 吉川，山田，水谷：2次元および軸対称選択取水に関する研究，土木学会論文報告集，第280号 1978年 12月



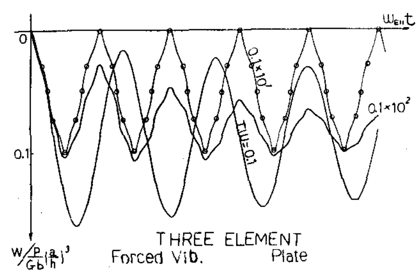
KELVIN
FreeVib. Beam
$\phi(0)=1$ $\dot\phi(0)=\ddot\phi(0)=\dddot\phi(0)=0$
Fig.1



KELVIN
Forced Vib. Beam
Fig.2



MAXWELL
Free Vib. Beam
$\phi(0)=1$ $\dot\phi(0)=\ddot\phi(0)=\dddot\phi(0)=0$
Fig.1



THREE ELEMENT
Forced Vib. Plate
$W/\frac{P}{Gb}(\frac{a}{h})^3$
Fig.3