I —11　骨組構造物の強制振動

信州大学　正○夏目正太郎
信州大学　正　石川　清志

1．はじめに

骨組構造物は弾性体の線材が組み合せられて、構成されているので、その全体の振動も素材である線材を仲介として、挙動が伝達される。従って構造物の振動も線材の振動の集積によってもたらされ、連結状態によってそれぞれ特異な振動形態を示すであろう。構造物の振動を集中質量とバネ、ダシュポットといった体系に置き換えた時代は去り、素材実体の挙動を細かく集積して全体構造の挙動と見るべき時代へ移ってきたと云って過言でなかろう。構造物の実体を把握して、線材は線材とし、付加質量はそれ相應の処置をすることにより、全体構造の振動となる。これらの点については、谷本・石川によって開発が進められており、位相の伝播とも見られるものである。発想は、すでに市販されている"演算子法構造解析 1"と同じに、固有マトリクスの概念を動的解析に適用したものである。

はりの挙動を示す微分方程式の解を用いるのは当然であるが、同次解と特解との合成がその最終解となるので、同時解では構造物の固有値を求める問題に帰着し、特解にて外力作用を取り入れる境界値問題とする。最後に同時解と境界値問題の解と合わせて、初期値問題にもって行き、全体挙動を示す解を得るのである。

2．出発方程式

対処する問題によって、出発微分方程式を選ばなければならない。ここでは1例として、地盤内に埋設された貯水塔を挙げることにする。弾性地盤内の線材ならばウィンクラーバネ定数kを入れて

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4} + \frac{\gamma A L^4}{g E I}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{L^4 k}{E I} w = \frac{L^4 Q}{E I}\sin pt \qquad (1)$$

特に取り挙げるものでもないが、この変位量wを特解w_pと同次解w_hとに分けると

$$w = w_h + w_p \qquad (2)$$

でそれぞれがつぎに掲げる微分方程式の解であろう。

$$\frac{\partial^4 w_h}{\partial \rho^4} + \frac{\gamma A L^4}{g E I}\frac{\partial^2 w_h}{\partial t^2} + \frac{L^4 k}{E I} w_h = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial^4 w_p}{\partial \rho^4} + \frac{\gamma A L^4}{g E I}\frac{\partial^2 w_p}{\partial t^2} + \frac{L^4 k}{E I} w_p = \frac{L^4 Q}{E I}\sin pt \qquad (4)$$

$$w_h = \lfloor \cos\nu\rho \;\; \sin\nu\rho \;\; ch\,\nu\rho \;\; sh\,\nu\rho \rfloor \mathbb{N}_h e^{i\omega t} \qquad (3,1)$$

$$w_p = \lfloor \cos\beta\rho \;\; \sin\beta\rho \;\; ch\,\beta\rho \;\; sh\,\beta\rho \rfloor \mathbb{N}_p \sin pt \qquad (4,1)$$

$$\nu = \sqrt[4]{\frac{\frac{\gamma}{g} A\omega^2 - k}{E I}} \cdot L \qquad (3,2)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\frac{\gamma}{g} A p^2 - k}{E I}} \cdot L \qquad (4,2)$$

変位量が示されれば、これから誘導される、たわみ角，曲げモーメント，せん断力はよく知れており、状態量をあらわす記法をもってすればつぎのようになる。貯水塔であることから等分布質量があり、

$$\mathbb{W}_{rh}(\rho) = \mathbb{D}_{hr}\mathbb{R}_{hr}(\rho)\cdot\mathbb{K}_{hr}(\rho)\,\mathbb{N}_{hr}\,e^{i\omega t} \qquad (3,3)$$

$$\mathbb{W}_{rp}(\rho) = \mathbb{D}_{pr}\mathbb{R}_{pr}(\rho)\,\mathbb{K}_{pr}(\rho)\,\mathbb{N}_{pr}\sin pt \qquad (4,3)$$

ここで$\mathbb{D}$は物理量による係数，$\mathbb{R}(\rho)$は座標を含む量、$\mathbb{K}(\rho)$は分布質量による影響をあらわす。

弾性地盤は層状に重ねられているので、その内を貫入して造られた貯水塔は、各層から受ける諸条件が異なる筈である。故にここにおける解法は、連続バリとして扱うことにするので、層番号を示す r を附してそれぞれ区間の状態量を区別している。線材構造物としての貯水塔は、各層の接触面でも状態量はすべて連続であるので、いわゆる移行子なるものはつぎのようになる。同次解に対しては、

$$\mathbb{L}'_r = \mathbb{L}_r \mathbb{K}_{\lambda r-1}(1) = \mathbb{R}_r^{-1}(0)\mathbb{D}_r^{-1}\mathbb{D}_{r-1}\mathbb{R}_{r-1}(1)\cdot\mathbb{K}_{\lambda r-1}(1)\ ; \quad \mathbb{N}_r = \mathbb{L}'_r \mathbb{N}_{r-1} \qquad (5)$$

各区間の固有マトリクスが(5)式の手法で移行されることが知れよう。一方任意区間の固有マトリクスは出発区間の固有マトリクスで表現しうる。

$$\mathbb{N}_r = \mathbb{G}'_r \mathbb{N}_1 , \quad \mathbb{G}'_r = \mathbb{L}'_r \mathbb{G}'_{r-1} \qquad (6)$$

出発区間の境界条件と最終区間の境界条件を示すマトリクスを、$\mathbb{B}_1$, $\mathbb{B}'_L$ とすれば、固有値方程式

$$\det\begin{bmatrix} \mathbb{B}_1 \\ \mathbb{B}'_L\cdot\mathbb{K}_{\lambda L}(1)\cdot\mathbb{G}'_L \end{bmatrix} = 0 \qquad (7)$$

をもって、固有値 $\omega_1, \omega_2 \cdots \omega_n$ が定められる。これら固有値を(7)式に現われるであろう所の固有マトリクス $\mathbb{N}_1$ を

$$\mathbb{N}_{1n} = \mathbb{P}_n(\omega)\,\Omega_n \qquad (8)$$

にとれば (3,3) は

$$\mathbb{W}_{hr}(\rho) = \sum_n \left[[\mathbb{D}\mathbb{R}(\rho)\cdot\mathbb{K}_\lambda(\rho)\cdot\mathbb{G}']_r \mathbb{P}(\omega)\cdot\Omega\, e^{i\omega t} \right]_n \qquad (9)$$

となる。特解にては外力を荷重マトリクスに分担させることとすれば (4,3)式の固有マトリクス $\mathbb{N}_{pr}$ が荷重マトリクを考慮したものに取りかえられる。すなわち

$$\mathbb{W}_{pr}(\rho) = \mathbb{D}_r \mathbb{R}_{pr}(\rho)\, \mathbb{K}_{pr}(\rho)\, (\mathbb{N}_{pr} + \langle \mathbb{K}'_p \rangle)\, \sin pt \qquad (10)$$

となり、移行子なるものを考慮すれば各区間の固有マトリクスが出発区間の固有マトリクスで表現され、

$$\mathbb{W}_{r}(\rho) = \mathbb{D}_r \mathbb{R}_r(\rho)\, \mathbb{K}_{pr}(\rho)\, [\mathbb{G}_r \mathbb{N}_1 + \mathbb{P}_{r-1} + \langle \mathbb{K}'_r \rangle]\, \sin pt \qquad (11)$$

が、各区間の状態量を示している。従って全体の状態量は (9) と (11) を加えたものに他ならない。そして境界条件を導入することにより、$\mathbb{N}_{p1}$ が確定され、各区間の特解による状態量は既知となる。

$$\mathbb{W}_r(\rho) = \sum_n \left[[\mathbb{D}\mathbb{R}(\rho)\,\mathbb{K}_\lambda(\rho)\,\mathbb{G}']_r \mathbb{P}(\omega)\cdot\Omega\, e^{i\omega t} \right]_n + \mathbb{D}_{pr}\mathbb{R}_{pr}(\rho)\cdot\mathbb{K}_{pr}(\rho)[\mathbb{G}_r\mathbb{N}_1 + \mathbb{P}_{r-1} + \langle \mathbb{K}'_r \rangle]\sin pt \qquad (12)$$

3．初期値問題

最早や (12) の第2項は確定値を得た。残るは Ω を決定すればすべて解けたことになる。これは初期条件として、

$$\begin{bmatrix} \omega \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}_{t=0} = 0 \qquad (13)$$

を用いて、変位量をフーリエ級数を導入し、決定するのである。

4．計算例

7層を貫抜きコンクリートパイプに水が充満している。時間と変位を示す。