

1. まえがき 無限帯板の動的現象を論じた研究は以外と少なく、我々の知る限りでは渋谷らによって研究報告されたのが最初であろう。この研究報告は、作用する集中衝撃荷重が座標に因してディラックのデルタ関数、時間に関して一定なステップ関数であることに注目してフーリエ・ラプラス変換によって解析し帯板の両端条件が単純支持および固定されている場合に適用している。このなかで、帯板の任意点に、点で表示される集中衝撃荷重も帯板の幅方向に因する有限領域に対してフーリエ級数、長手方向の無限領域に対してフーリエ積分による2重線形結合とした面表示にて表わしている。2次元的に極端な不連続性を有する集中衝撃荷重と連続関数のフーリエ級数、フーリエ積分の2重線形結合によって表現する方法は、採用するフーリエ級数の展開項数、フーリエ積分の積分上限値が解の精度に顕著な影響を与える。たわみに関して比較的早い収束性を示すが、曲げモーメント、さらに、せん断力に関しては収束した結果を得ることが一般に困難とされている。この現象は本解析法についても同様に表われるが、解析の特徴としては、点で表示される集中衝撃荷重が線形結合による2重展開を必要とせず、あくまでも一方による1重の展開によって解析できることを明らかにした。

2. 理論解析 直角座標 (x, y) において、慣性力の影響を考慮した均質等方性板の曲げたわみに因する運動方程式は

$$D\nabla^2\omega + c\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = q \quad (1)$$

である。ここに、 $\omega = \omega(x, y, t)$: 板の曲げたわみ、 $\nabla^2 = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$, D : 曲げ剛性、 c : 密度、 $q = q(x, y, t)$: 分布衝撃荷重、 x, y : 座標、 t : 時間。(1)のたわみ ω の解は、板の自由振動に表われる同次方程式の同次解 ω_h と、衝撃荷重の影響を考慮した特解 ω_p の和で表わすものとする。

$$\omega = \omega_h + \omega_p, \quad (2)$$

$$D\nabla^2\omega_h + c\frac{\partial^2\omega_h}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

$$D\nabla^2\omega_p + c\frac{\partial^2\omega_p}{\partial t^2} = q \quad \text{または} \quad D\nabla^2\omega_p + c\frac{\partial^2\omega_p}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

(4)の右2項において、同次方程式と全く同じ形態の微分方程式としたのは作用する衝撃荷重が集中荷重を対象としているから、すべし荷重の作用しない点で成立する微分方程式に注目して扱う。無限帯板であることを考慮して、集中衝撃荷重は無限方向に因しフーリエ積分にて展開して表わし、これと直角方向に因しては作用点における板の連続条件を考慮することにより、集中荷重の形態を完全に表現できる。図-1のように、集中衝撃荷重 $P(t)$ が $(x=\epsilon, y=\kappa)$ 点に作用した場合、 $P(t)$ と $x=\epsilon$ に注目した x に因するフーリエ積分にて展開して表わすことにすると、 $y=\kappa$ 点上における板の連続条件は

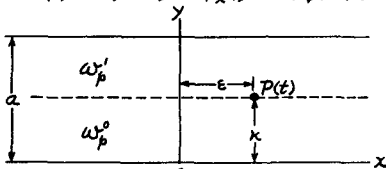


図-1. 集中衝撃荷重の作用状態

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ -D\left(\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \\ -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \end{bmatrix} (\omega_p' - \omega_p)_{y=\kappa} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P(t) \end{bmatrix} \quad (\nu: \text{ポアソン比}) \quad (5)$$

ここに、 ω_p^0, ω_p^1 は次式に定義するものである。

$$\omega_p^0 = \begin{cases} \omega_p^0 & (0 < y < x) \\ \omega_p^1 & (x < y < a) \end{cases} \quad (6)$$

さらに、集中衝撃荷重 $P(t)$ は時間に依存せず一定 $P(t) = P_0$ であるとすると、特解の微分方程式は(4)の時間の影響を取り除いた静的たわみの重調和方程式となる。 $\nabla^2 \omega_p = 0$ 。 (7)

帯板の両端支持とたとえば固定支持とすると、(2)の関係から、境界条件は次式のように同次項と特解項の和で表わす。

$$\left[\frac{\omega}{\partial y} \right]_{y=0,a} = 0, \text{ または } \left[\frac{\omega}{\partial y} \right]_{y=0,a}^h + \left[\frac{\omega}{\partial y} \right]_{y=0,a}^p = 0. \quad (8)$$

ここで、上記の境界条件を満足させるためには、同次項と特解項が別々に満足するようにとればよい。すなわち

$$\left[\frac{\omega}{\partial y} \right]_{y=0,a}^h = 0, \quad (9) \quad \left[\frac{\omega}{\partial y} \right]_{y=0,a}^p = 0. \quad (10)$$

(9) のもとで(3)を解くと、フーリエ積分 γ に従属した固有関数が誘導される。 (Ω_n : 未定常数)

$$\omega_h = \int_0^\infty d\gamma \sum_{n=1}^\infty Y_n(\eta) e^{i\omega_n \tau} \Omega_n \begin{bmatrix} \cos \gamma \xi \\ \sin \gamma \xi \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{a}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad T = \sqrt{\frac{ca^2}{D}}$$

固有関数 $Y_n(\eta)$ は連続的に変化する γ と、円振動数 ω_n とによる固有値方程式 $F(\gamma, \omega_n) = 0$ の満足する γ と ω_n の関係とを定めることになる。両端支持条件固定の場合の γ と ω_n の関係を図-2 に示す。

(5) の関係を用いて、(10) のもとで(7)を解くと、集中衝撃荷重 P_0 の作用した ω_p は決定され、完全に既知なものとなる。

帯板が $t=0$ において静止状態とすると

$$\left[\frac{\omega}{\partial y} \right]_{t=0} = 0, \text{ または } \left[\frac{\omega}{\partial y} \right]_{t=0}^h + \left[\frac{\omega}{\partial y} \right]_{t=0}^p = 0. \quad (12)$$

同次解に含まれる Ω_n は上記初期条件に合わせ決定される。

図-3, 4は、帯板の中央点 ($x=0, y=0.5a$) に集中衝撃荷重 P_0 が作用したときの、載荷点のたわみ ω と

($x=0, y=0.4a$) 点の曲げモーメント M_y について示したものである。同次解の形態と、特解のもつ特性により、たわみ、曲げモーメントは時間推移に伴い静的たわみ ω_p 、静的曲げモーメント $M_{y,p}$ を中心として振動形態を示し、その振幅はしだいに小さくなり、静的結果と中心に減衰振動する。

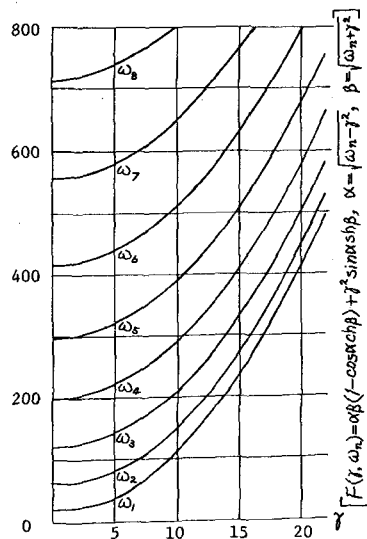


図-2. $F(\gamma, \omega_n) = 0$ を満足する γ と ω_n の関係。

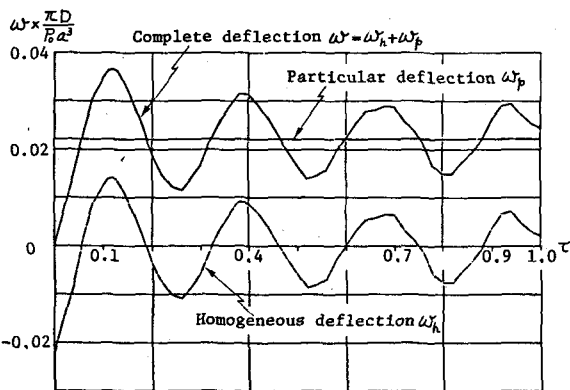


図-3. 中央点 ($x=0, y=0.5a$) のたわみ

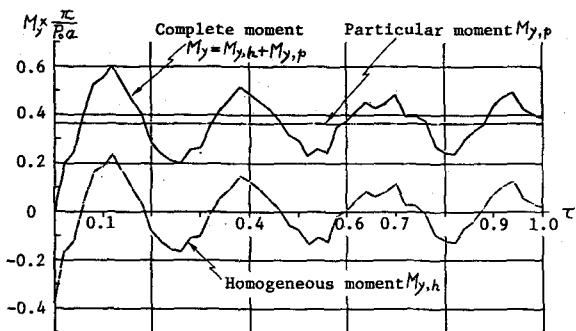


図-4. ($x=0, y=0.4a$) 点の曲げモーメント M_y