

信州大学 工学部 正員 ○三井 康司

信州大学 工学部 正員 草間 孝志

1. まえがき 近年 F.E.M. に代り境界要素法 (B.E.M.) が注目されており¹⁾, 我国でも小林らが弾性固有値, フラック問題に適用している^{2), 3)}. さて Rizzo らは対応原理を用いて粘弾性問題を解析しているが, Laplace 空間から物理面に変換する数値 Laplace 逆変換を Schapery の提案した最小自乗法を使用し, 高精度の解を得たとしている⁴⁾. しかしこの Schapery の方法は仮定関数に直交性がないゆえ, 未定係数の決定に際して連立方程式を解く必要がある⁵⁾. 本文は筆者らが先に提案した数値 Laplace 逆変換法を使用し⁶⁾, 種々の利便を有する B.E. 手法の線形粘弾性解析への適用を試みたものである.

2. 解析手順 弾性連続体に対する境界要素法の定式化は文献⁷⁾に詳しい. いま Lapunov 曲面たる境界 L で囲まれる連続体 (多重連結領域を含む) R が線形等方性体であると式 (1) が成立する. ここに u, g は変位, 応力の分力, G, U は基礎テンソルであり, たとえば平面ひずみ状態では式 (2) のようになる. λ, μ は Lamé の定数, $r = |p - q|$ である.

$$u_j(p) - 2 \left[u_i(q) G_{ij}(p, q) - g_i(q) U(p, q) \right] da = 0 \quad \dots (1), \quad p, q \in L.$$

$$\left. \begin{aligned} U_{ij} &= \frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left\{ \delta_{ij} \log r - \left[\frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \right] r_i r_j \right\} \\ G_{ij} &= \frac{\mu}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ \left[\delta_{ij} + 2 \left(\frac{\lambda}{\mu} + 1 \right) r_i r_j \right] \frac{\partial}{\partial n} \log r + \left[(\log r)_i r_j - (\log r)_j r_i \right] \right\} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

$$\sigma_{ij}(p) = \lambda u_{k,k}(p) \delta_{ij} + \mu [u_{i,j}(p) + u_{j,i}(p)] \quad \dots (3), \quad p \in R.$$

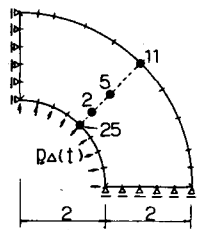
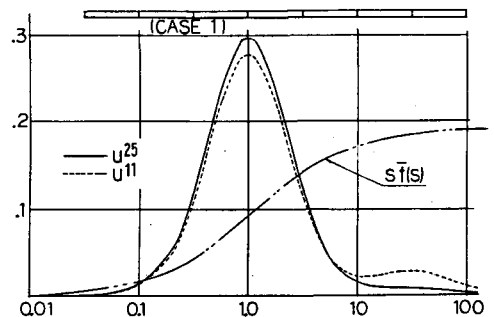


図-1 粘弾性厚肉円筒

図-2 σ の分布と $S(t)$

な $\bar{u}, \bar{g}$ は Laplace 変換したものを表わす)に置換し, L を n 区間に分割する.

表-1 Laplace 変数

Case	N. of term	Laplace parameter	Time for cal.
1	8	0.032 0.1 0.32 1.0 3.2 10 32 100	21.018
2	2	1.0 32	11.678
3	1	1.0	9.367
4	8	$10^2, 10^4, 10^6, \dots, 10^8$	25.342
5	15	$10^2, 10^4, 10^6, \dots, 10^8$	42.812

$\bar{u}, \bar{g}$ が区間内で一定すると式 (4) となり, この連立一次方程式を解くことにより $\bar{u}, \bar{g}$ が求められる.

表-2 選定による比較

t	Exact	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4	Case 5
0.0	0.0	0.00018	0.00706	0.05466	0.00146	0.04226
0.1	0.14270	0.14336	0.14725	0.14902	0.14373	0.14650
0.2	0.24004	0.24172	0.24334	0.21492	0.24150	0.24083
0.3	0.32669	0.32827	0.32854	0.30807	0.32772	0.32617
0.4	0.40502	0.40598	0.40554	0.40148	0.40611	0.40340
0.5	0.47590	0.47602	0.47522	0.48527	0.47659	0.47328
0.6	0.54003	0.53925	0.53826	0.55772	0.53981	0.53702
0.7	0.59806	0.59640	0.59531	0.61971	0.59663	0.59373
0.8	0.65057	0.64804	0.64691	0.67277	0.64792	0.64549
0.9	0.69808	0.69473	0.69363	0.71842	0.69435	0.69234
1.0	0.74107	0.73695	0.73589	0.75798	0.73642	0.73473

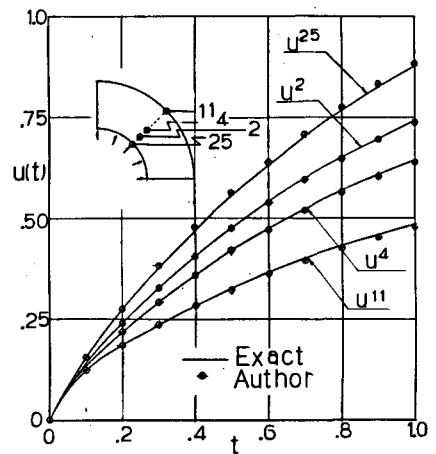


図-3 半径方向変位の経時変化

$$\bar{u}_j - 2 \sum_{k=1}^n \left\{ \bar{u}_{ik} \left(\bar{G}_{ij}(P, Q) dQ - \bar{g}_{ik} \int_{\Gamma_1} \left(\bar{U}_{ij}(P, Q) dQ \right) \right) \right\} = 0 \quad \text{--- (4)}$$

一方時間依存性の解を $y(t) = a_1 + a_2 t + f(t)$ --- (5), とする. $f(t)$ は過渡応答成分であり, 近似的に Dirichlet 級数 $f(t) = \sum_{k=1}^m B_k e^{s_k t}$ で表わされる. 式 (4) で求められた Laplace 面の解より δ の分布を求め, 卓越する δ の値を用いて数値 Laplace 逆変換を行うことにより実空間での物理量を得ることが出来る.

3. 数値計算例 (1) 粘弾性厚肉円筒: 図-1 は厳密解の既知なもので対称性を考慮して $1/4$ を解析した. 図-2 より表-1 のような 5 種の選定を行ったがその結果は表-2 のようになる. Case 5 は Schapery の選定法であるが選定数を多くしても精度は必ずしもよくなる. 図-3 は厳密解と Case 1 の比較でありよく一致している. なお Case 1 の選定で F.E.M. 解析 (節点数 54, 要素数 80, 三角形先みずみ) を試みたが同精度で一致した.

(2) 円孔を有する粘弾性半無限体: 図-4 は要素分割状態と境界以外で物理量の知りたい点を示す. なお同問題を F.E.M. 解析したものが図-4 である. 図-5 は両解析手法の比較であり, 最大変位差では数% の差が見られる. これは F.E.M. における円孔周辺の要素分割の粗さに帰因するものと思われる.

なお両計算例とも体積変化に対しては弾性, せん断変形に対しては Kelvin 固体, 内圧は Step 荷重であるが, 他の粘弾性モデル, 荷重に対しても解析手順は同様である.

4. あとがき (1) B.E.M. は F.E.M. と違って境界上からの離散化により, 内部分割を要しない. よって節点数, 要素数ともかなり小さくなるので計算機容量が経済的である. (2) 対応原理を用いて線形粘弾性体を解析する場合, 文献 6) の数値 Laplace 逆変換法を使用することにより, Rizzo の手法よりも精度よく, 経済的に計算することが可能である. (3) 本解析法は F.E.M. と併用して "構造物と土との相互作用問題" に効果的に適用できる.

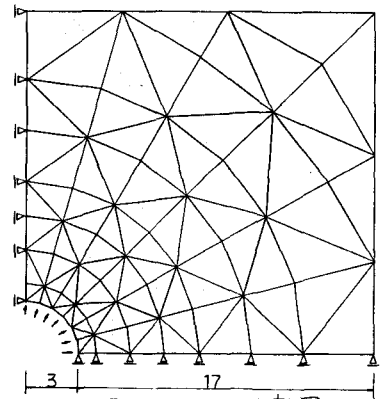


図-4 F.E.M. 分割図

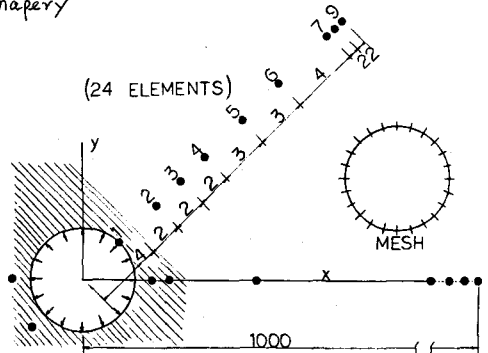


図-5 B.E.M. 分割図

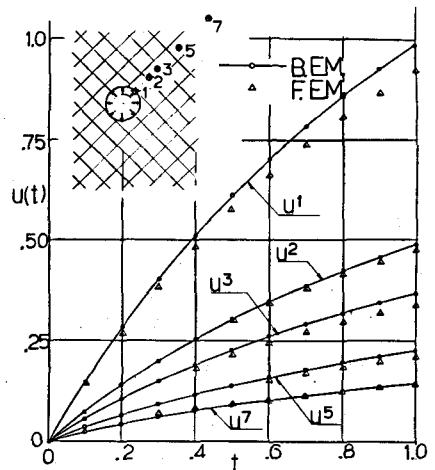


図-6 半径方向変位の経時変化

参考文献:

- 1) Banerjee, P.K., Int. J. Mech. Sci., Vol. 18, pp. 293 - 303, 1976.
- 2) 丹羽・小林・北原, 土木学会論文報告集, 第 285 号, pp. 17 ~ 28, 1979.
- 3) 小林・西村, 土木学会論文報告集, 第 288 号, pp. 57 ~ 65, 1971.
- 4) Rizzo, F.J. and D.J. Shippy, SIAM. Appl. Math., Vol. 2, No. 2, pp. 321 - 330, 1971.
- 5) Schapery, R.A., Proc. 4th U.S. Nat'l Cong. Appl. Mech., No. 2, pp. 1025 - 1085, 1962.
- 6) 草向・三井・吉田, 土木学会論文報告集, 第 292 号, pp. 97 ~ 108, 1979.
- 7) Brebbia, C.A., PENTECH PRESS, 1978.