

信州大学工学部 正員 〇長 尚

信州大学工学部 正員 小山 健

1. まえがき

構造物の安全性の問題を確率論的に議論する際、Cornell¹⁾の提案した安全性指標 β が安全性の尺度としてしばしば用いられる。ところがこの安全性指標 β の安全性の尺度としての有効性についての評価が人によって区々で、場合によっては過大評価されたり、逆に過小評価されたりしているように思われる。このようなことになるのは安全性指標 β について、適切で、共通な理解が必ずしもなされていないことによるものと思われる。そこで本文においては、まずHasofer²⁾とLindが定義した安全性指標(以下これを $\tilde{\beta}$ と記す)の意味を明確にし、これとCornellの提案した β との関連を明らかにすると共に、安全性指標 β の安全性の尺度としての有効性について若干考察してみることにする。

2. Hasoferらの定義した安全性指標 $\tilde{\beta}$ の意味とCornellの提案した β との関連について

HasoferらはCornellの提案した β を改良して安全性指標を次のように定義した。“破壊限界曲面 $Z=g(X)=0$ …(1)において、確率変数 X_i を正規化変換、 $x_i=(X_i-\bar{X}_i)/\sigma_i$ …(2)もしくは対数正規化変換、 $x_i=(\ln X_i - \ln \bar{X}_i)/V_i$ …(3)して標準化空間で表現された破壊限界曲面 $\tilde{Z}=\tilde{g}(x)=0$ …(4)への原点($x=0$)からの距離(ノルム)が安全性指標 $\tilde{\beta}$ である。”ここでこの $\tilde{\beta}$ の意味について考えてみ

よう。まず式(1)

に対する破壊確率 P_f は次式を計算することである。 $P_f=P_f(Z \leq 0)=\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(X_1, \dots, X_n) dx_1 \dots dx_n$ …(5)

変数が2個の場合式(5)の計算

は、図-1の P_{f2}

は、図-1の P_{f2}

(X_1, X_2)の曲面と X_1, X_2 平面で囲まれる体積のうち斜線を付した領域の部分を求めることになる。いまこれらの変数 X_1, X_2 がそれぞれ正規分布もしくは対数正規分布に従う確率変数とすれば、この体積は図-2の $p_{12}(x_1, x_2)$ の曲面と x_1, x_2 平面で囲まれる体積のうち斜線を付した領域の部分(図-3参照)に相当する。一方図-2において、原点から $\tilde{Z}=0$ に下ろした垂線の交点 x_T での接線 $\tilde{Z}_T=0$ を考えると、 $P_f^*=P_f(\tilde{Z}_T \leq 0)$ …(6)は図の点線より左上の領域

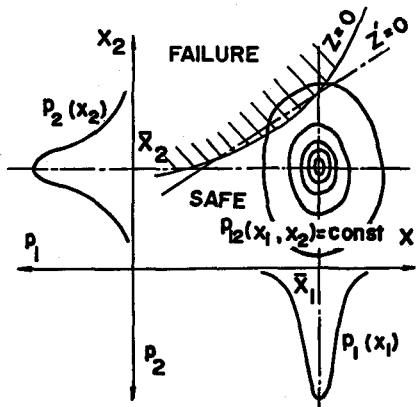


図-1

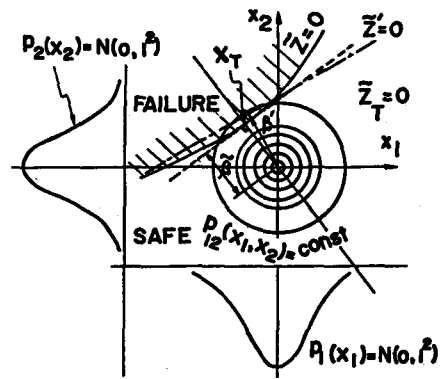


図-2

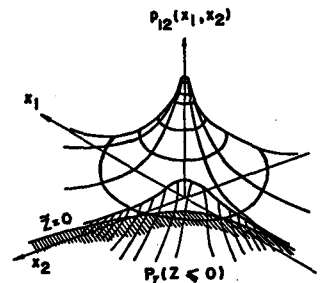


図-3

の $p_2(x_1, x_2)$ 曲面の体積に当り、これは同時に次のような関係がある。 $p_2^* = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{z^2}{2}) d\eta \dots (7)$ したがって図-2に示すように、積分領域内の $p_2(x_1, x_2)$ の値の大きい部分が $\tilde{z} \leq 0$ と $\tilde{z}_T \leq 0$ とで共通に含まれているような場合は $p_2 = p_2^*$ となり、 $\tilde{\beta}$ はほぼ正確に破壊確率 p_2 と関連がつくことになる。次に Cornell の提案した β を図-1, 2を利用して説明すると次のようになる。まず個々の確率変数が正規分布の場合、 $z=0$ を平均値のまわりで線形化して $z'=0$ とし、これについて安全性指標を求めたことになっている（一次近似法）から、図-1, 2に示すように、 $z=0$ を正規に変換した直線 $\tilde{z}'=0$ ($\tilde{z}=0$ を原点のまわりで線形化した直線と同じ) の原点からの距離 β' に相当する。したがって正確な積分領域の $p_2(x_1, x_2)$ の値の一番大きい点 x_T で $\tilde{z}=0$ を線形化した $\tilde{z}_T=0$ を用いることになる。 $\tilde{\beta}$ より、 β' の方が p_2 に対する近似度は落ちることになる。対数正規分布の場合は、 $z=g(x)=0$ を $z=Y_1-Y_2=0$ の形に表わし、この Y_1, Y_2 について一次近似法により平均値および分散を求めた後に、対数正規化変換したときの直線の原点からの距離に当るから、図-2の β' とは異なり、破壊確率 p_2 に対する近似度は、 β' よりもさらに悪くなる。なおこれまでの説明から判るように、これらの $\tilde{\beta}$ および β' は、正規分布の場合 z が x の線形関数のとき、対数正規分布の場合 z が $AX_1^a - BX_2^b$ のような特殊な関数のとき、 p_2 と正確に対応がつく。表-1に正確な p_2 に対応する β (別稿 I-7で提案した方法により p_2 を計算し β を求めたもの) と、 $\tilde{\beta}$ および β' の計算例を示す。同表において、I-A は $z=x_1^2+x_2^2-2x_1x_3=0$, $\bar{X}=(10, 10, 20)$, $\sigma^2=(5, 7, 3)$

表-1

	$\beta(p_2)$	$\tilde{\beta}(\tilde{p}_2)$	$\beta'(p_2')$
I-A	2.21 (0.0136)	2.31 (0.0104)	2.58 (0.005)
I-B	1.93 (0.0269)	1.95 (0.0256)	1.65 (0.050)
II	1.85 (0.0320)	2.18 (0.0156)	5.0 (0.0000003)
III	3.22 (0.000641)	3.28 (0.000520)	3.82 (0.000067)

の正規分布の場合、I-Bは同じものを対数正規分布とした場合、IIは $z=x_1-x_2(x_2-10)-30$, $\bar{X}=(10, 5)$, $\sigma=(1, 1)$ の正規分布の場合、IIIはRCはり断面の例の場合である。この表によると、 β' は β の近似解としての有効性が全く失われるほどのものもあるの

に対して、 $\tilde{\beta}$ は比較的 β に近い値となっている。それでも破壊確率と比較すると、IIでは $\tilde{p}_2$ は p_2 の約半分となっている。その原因は図-4に示すように正確な p_2 の積分領域は $\tilde{z}=0$ より外の全域であるが、 $\tilde{\beta}$ に対応する $\tilde{p}_2$ の積分領域は $\tilde{z}_T=0$ より上側の領域に相当し、積分領域が約半分になっているからである。しかし我々が扱う構造設計の問題では、このような極端な例は考えられず、IIIの例のように $\tilde{\beta} \approx \beta$ となるものと思

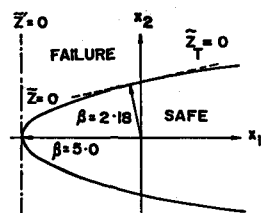


図-4

われる。したがって個々の確率変数が正規分布もしくは対数正規分布する場合、Cornell の提案になる β は場合によってはかなり問題があるが、Hasoferらの定義した $\tilde{\beta}$ は安全性の尺度としての有効性を向上させる。しかし安全性指標の安全性の尺度としての有効性を評価する際の問題点として、(1) 統計データ不足、(2) 確率分布の不明確、(3) p_2 を尺度とすべき、(4) β を直接設計式に使い難い、等が一般に指摘されているが、これらについては別の機会に論じることとする。

参考文献 1) Cornell, C.A.: Structural Safety Specifications Based on Second Moment Reliability, IABSE. Symp., on Concepts of Safety and Methods of Design, 1969.

2) Hasofer, A.M. and Lind, N.C.: Exact and Invariant Second Moment Code Format, ASCE, Vol. 100, EM1, Feb. 1974.