

信州大学工学部 正員 長 尚

信州大学工学部 正員 小山 健

1. まえがき

一般に破壊確率 β は、多数の確率変数 x の関数として表わされる破壊基準関数 z_j が一つでも負となる確率、 $\beta = 1 - P\{z_1 > 0, z_2 > 0, \dots, z_m > 0\} \dots (1)$ を計算することにより求められる。ここに $z_j = g_j(x)$ ($j=1, \dots, m$) $\dots (2)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \dots (3)$ である。ところがこれを正確に計算することは、個々の確率変数の確率分布および z_j の関数形が特殊な形をし、しかも各 z_j 間の相関が既知のような特別の場合を除いて非常に困難である。そこで乱数を用いたモンテカルロ法の利用が考えられるが、この方法には一般に計算時間が非常にかかるという欠点がある。本文では計算時間の節約を図った一計算法を提案し、この方法の計算の効率について若干吟味してみることにする。

2. モンテカルロ法による一計算法

まず式(2)において $m=1$ で、 $z = x_1 - x_2 \dots (4)$ の場合について考える。いま図-1に示すような確率密度曲線をもつ確率変数 x_1, x_2 についてみると、これらの確率分布に従う乱数を何組か発生させたとしても、 $x_1 < x_2$ となつて $z \leq 0$ となる可能性の高い組となるのは、ある程度 x_1 は小さくたとえ x_1^0 より小さくなり、 x_2 は x_2^0 より大きい値になったときである。そこでこれらの x_1^0, x_2^0 を仮りの上下限值と名づ

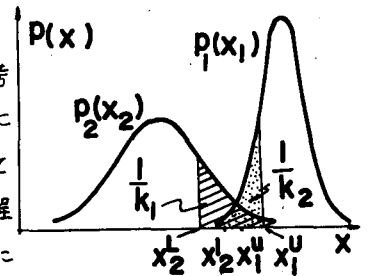


図-1

け、 k_1, k_2 を整数として、 x_1^0 を下まわる確率が $1/k_1$ 、 x_2^0 を上まわる確率が $1/k_2$ となるように選ぶと次のようなことが言える。いま x_1 の乱数を x_1^0 以下の範囲で発生させこれを x_1^u とし、 x_2 の乱数を x_2^0 以上の範囲で発生させこれを x_2^l とすると、 x_1^u, x_2^l はそれぞれ x_1 を k_1 個発生させたとしたときの最小値、 x_2 を k_2 個発生させたとしたときの最大値と考えることができる。したがってもし、 $x_1^u > x_2^l$ であれば、仮想上の x_1 の $k_1 - 1$ 個の乱数および x_2 の $k_2 - 1$ 個の乱数を含めたすべての組み合わせ $k_1 \times k_2$ 組に対して $z > 0$ が確かめられたことになる。つまり2個の乱数で作った1組の変数の値を用いるだけで、 $k_1 \times k_2$ 組発生させたと同じ効果があることになる。しかし $x_1^u < x_2^l$ であれば、残りの $k_1 \times k_2 - 1$ 組の中にも $z \leq 0$ となる可能性があることになるので、 x_1 を x_1^0 より大きい範囲で $k_1 - 1$ 個発生させ、 x_2 を x_2^0 より小さい範囲で $k_2 - 1$ 個発生させ、これらと x_1^u, x_2^l を含めた $k_1 \times k_2 - 1$ 組について $z \leq 0$ かどうかを確かめる必要がある。この場合は計算時間は減らないが、一般に $x_1^u > x_2^l$ となることが多いから、計算時間が短縮されることになる。このようなやり方は変数の数が幾つでも、 z_j の関数形がどんなものでも又 m が多くなつてもほぼ同様に利用することができる。そのためには変数を次の三つのグループに分ける。第一番目はその変数の値が増大するとすべての z_j が増大するような変数、これをIグループ x_I と名づける。第二番目はその変数の値が増大するとすべての z_j が減少するような変数、これをIIグループ x_{II} と名づける。第三番目はこれらのグループに属さない変数、これをIIIグループ x_{III} と名づける。 x_I は前述の x_1 に相当するから仮りの上限値 x_I^0 を

決め、乱数により x_{II}^u を発生させ、 x_{II} は x_2 に相当するから、仮りの下限値 x_{II}^L を決め、乱数により x_{II}^L を発生させる。 x_{II} は仮りの上下限値は設けられないから、各変数の全域にわたって、つまり $k_i = 1$ として乱数を発生させ x_{III} を決める。以下の手順は前述と同じなので説明は省略するが、破壊確率は次式で求められる。 $p_f = (\sum_{i=1}^N n_i) / (M \times N) \dots (5)$ こゝに、 $M = \prod_{i=1}^n k_i \dots (6)$ 、 n_i : 各 M 組に対して $z \leq 0$ となった回数、 N : M 組の試行回数である。

3. 本方法の計算の効率について

本法において z_j の正負を調べる回数は $Q = N + P(M-1) \approx N + PM \dots (7)$ である。こゝに P は x_I^u 、 x_I^L 、 x_{II} の組み合わせで $z_j \leq 0$ のものがあつた回数である。ところで幾つかの計算例から大ざっぱに判断して、 P 回のうちで平均的に $z_j \leq 0$ となる回数、 $\bar{z} = \sqrt{M} \sim 10\sqrt{M} \dots (8)$ とすれば、式(5)より $P \approx \bar{z} N / \sqrt{M} \sim 0.1 \bar{z} N \sqrt{M} \dots (9)$ となる。したがって、 $Q \approx N(1 + \bar{z} M^{\frac{1}{2}}) \sim N(1 + 0.1 \bar{z} M^{\frac{1}{2}}) \dots (10)$ となる。一方最も単純な方法での回数は $M \times N$ に相当するから、本法の最も単純な方法に対する計算の効率比 η は次のようになる。 $\eta \approx \frac{Q}{M \times N} = \frac{1}{M} + \bar{z} \sqrt{M} \sim \frac{1}{M} + 0.1 \bar{z} \sqrt{M} \dots (11)$ こゝで $\frac{d\eta}{dM} = 0$ の条件を用いて最も効率の良い M の値 M_{opt} を求めると、 $M_{opt} \approx (\frac{2}{\bar{z}^2})^{\frac{2}{3}} \sim (\frac{20}{\bar{z}^2})^{\frac{2}{3}} \dots (12)$ となる。本法が単純な方法に比べて $1/K$ の時間で済むという表現をするために $K = \frac{1}{\eta} \dots (13)$ とおくと、最も効率の良い場合の K つまり K_{max} は、 $K_{max} \approx \frac{1}{3} M_{opt} \dots (14)$ と

なる。図-2に M_{opt} 、 K_{max} を求めるためのノモグラムを示す。以上により本法で計算しようとする破壊確率 p_f の値がほゞ見当がつけば、式(12)、(14)もしくは図-2より比較的効率のよい M およびその場合の単純な方法に対する計算時間の節約比 K が概略推定できることになる。なお同程度の精度で計算するためには単純な方法では p_f に逆比例して計算時間が増加するが、本法の M_{opt} を用いるとそれの $1/K_{max}$ に比例、つまり $(\frac{1}{p_f})^{\frac{1}{3}}$ に比例して計算時間が増加することになり、計算時間

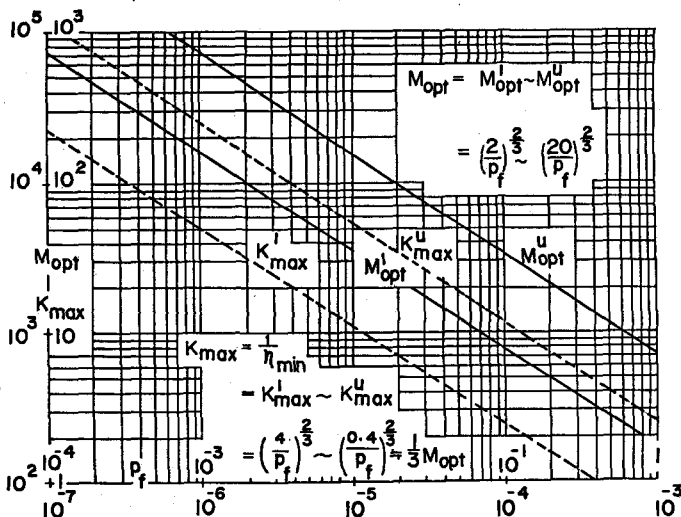


図-2

間の p_f の減少に伴う増加率は著しく減ずることになる。両者の比較を表-1に示す。この他に計算の効率に影響を与える要因の一つとして、個々の k_i の選び方が考えられる。何故なら、残りのすべての乱数を発生させる必要のある場合の個数は1度につき、 $\sum_{i=1}^n (k_i - 1)$ 個であるから同じ M の値に対してなるべく同じ程度に k_i の値を分散させた方が乱数の発生は少なく済み、又変数によつては仮りの上下限値を設けることの意味が異なることもあるからである。本法を用いた具体的な計算例については講演の当日発表することにする。

表-1

p_f	本 法 $(\frac{1}{p_f})^{\frac{1}{3}}$	単純方法 $\frac{1}{p_f}$	単/本 $(\frac{1}{p_f})^{\frac{2}{3}}$
10^{-1}	2	10	5
10^{-2}	5	100	20
10^{-3}	10	1000	100
10^{-4}	22	10000	464
10^{-5}	46	100000	2154
10^{-6}	100	1000000	10000