IV—5　　複数OD利用者最適配分に関する考案

信州大学大学院　学生員　○衛門 久明
信州大学工学部　正員　奥谷 巌

1. はじめに

協力ゲームの考え方を基にした利用者最適配分に関しての数理計画問題としての定式化及びその単一のOD交通への適用はすでに述べた。この配分法は個々のOD交通についてみると，自らこうむりうる効用を最少にしようとする点で合理的であるが，問題全体が多目的計画問題となるために一般的な数理計画問題のような形では解が求まらず，また制約条件のなかに非凸関数が含まれると云う点で解くことが困難になっている。本研究に於いては一般的なネットワークについての利用者最適配分の必要条件について考察し，同時に等時間原則配分と利用者最適配分の数学的な関係の検討を試みた。

2. 利用者最適配分の必要条件

利用者最適配分法を数理計画問題として定式化すると次のようになる。

目的関数　$Z_i \to min \quad i \in M$　(1)　M：ODの集合，I_i：第iODのルート集合

制約条件
$$\left\{\begin{array}{lll} \{\sum_{k\in K}\delta_{ij}^k \cdot f_k(X_k)-Z_i\}\cdot x_{ij} \leqq 0 & & (2) \\ \sum_{j\in I_i} x_{ij} = Q_i & i \in M & (3) \\ \sum_{i\in M}\sum_{j\in I_i}\delta_{ij}^k \cdot x_{ij} = X_k & k \in K & (4) \\ x_{ij} \geqq 0 & j \in I_i & (5) \end{array}\right.$$

K：リンクの集合
x_{ij}：第iOD第jルート交通量
X_k：第kリンク交通量
Z_i：第iOD最大走行時間

$f_k(X)$：第kリンク走行時間関数，Q_i：第iOD交通量，δ_{ij}^k：ルート行列の係数

この数理計画問題は前にも述べたように式(2)が凸制約ではないために真性Pareto最適解の十分条件は見い出し得ないが，必要条件はKuhn−Tuckerの定理を用いて次のようにして得られる。すなわち，ある配分x（式(3)〜(5)を満足しているものとする）がPareto最適解であるためには，

$$\mu_i-\sum_j \nu_{ij}\cdot x_{ij} = 0 \quad (6), \quad -\lambda_{ij}+\nu_{ij}\{\sum_k \delta_{ij}^k f_k(X_k)-Z_i\}-\sum_k \delta_{ij}^k \cdot \eta_k-\theta_i = 0 \quad (7)$$
$$(\sum_i\sum_j \delta_{ij}^k \cdot x_{ij}\cdot \nu_{ij})\frac{df_k}{dX}+\eta_k = 0 \quad (8), \quad \lambda_{ij}\cdot x_{ij} = 0 \quad (9), \quad \{\sum_k \delta_{ij}^k \cdot f_k(X_k)-Z_i\}x_{ij}\cdot \nu_{ij} = 0 \quad (10)$$

のすべての式を満たす乗数$\mu_i \geq 0$，$\lambda_{ij} \geqq 0$，$\nu_{ij} \geqq 0$，η_k，θ_i（$i\in M, j\in I_i, k\in K$）が存在しなければならない。この式(6)〜(10)はこれらの乗数に関しては線型であるので，ある配分が与えられたときにPareto最適解となり得るかどうかと云うことは比較的容易に判定することが可能になる。この判定には二者択一の定理による方法も考えられるが，ここでは式(6)〜(10)を制約条件とした線型計画法による一般的な判定法について述べることにする。今，ある配分xが与えられたとすると，それを基にリンク交通量ベクトルX，最大走行時間Z_iを決定できる。もしその配分がPareto最適解であるとすると，式(6)〜(10)を満たし，乗数の制約を満足する解が存在する。ここで目的関数を，

$$\sum_{i\in M}\mu_i \to max \qquad (11)$$

と設定しても許容解は存在する。μ_iは正値であり，η_k，θ_iは無制約であるが式(6)〜(8)を適当に線型変換することによりこれらを消去し目的関数を，

$$\sum_{i\in M}\sum_{j\in I_i} x_{ij}\cdot \nu_{ij} \to max \quad (12)$$

とする一般的な線型計画問題として定式化できる。そして式(6)に代入して$\mu_i \geq 0$を満たすかどうか

を調べることにより，必要性を判定できる。この問題の制約条件は乗数の非負制約をのぞいてすべて等式制約となるので，実際には適当な線型変換を行なうことにより変数及び制約式の数を減らすことが可能になる。

3. 等時間原則配分との関係

所謂Wardropの等時間原則配分が必ずしもPareto最適解にならないと云うことは前に示したが，一般的なネットワークに於ける等時間原則配分についても上に述べた必要条件の判定法を用いてPareto最適解かどうかを確かめることができる。このとき式(10)は必然的に満足されており，式(7)についても$x_{ij} \geq 0$であるなについては簡単になるので，全体としての制約条件も比較的拘束の少ないものとなってくる。また，ネットワークが大きくなる（リンクの数やODの数が増える）に伴い，制約条件の式の数に比べて変数の数が多くなるので変数空間に於いての自由度が増す傾向にある。これらのことより定性的に見て，等時間原則配分が利用者最適配分の解（すなわちPareto最適解）にならないと云うことは非常に局所的な場合を除いて一般的には余り起り得ないようである。しかし，この判定はあくまでも必要条件を満足しているかどうかを見るものであり，十分性については確かめることができないと云うことに注意すべきである。

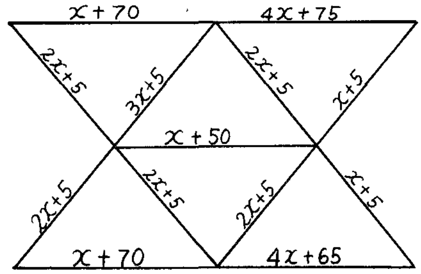

図1（走行時間関数）

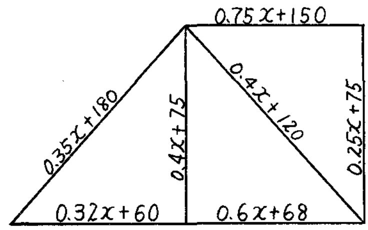

図2（走行時間関数）

4. 計算例

図1及び図2に示す2つのネットワークについて上に述べた判定法を用いて等時間原則配分の必要性の判定を行なう。図1は等時間原則配分がPareto最適解ではない例であり，線型計画問題に於いて0以外に式(6)～(10)を満足する非負解は得られない。制約条件式及び変数の数は図2の例（ODの数10，リンク数7，総ルート数24）に於いて適当な線型変換を行なうことによって各々14，24個にまで減らすことができたが，ネットワークの大きさが増大するに従ってこれらの数も非常に大きなものとなってくる。なお詳しい計算結果については当日発表する。

5. あとがき

利用者最適配分の解の集合を検討するに際して，等時間原則配分との比較と云うことは重要な問題となってくると思われる。すなわち，もし等時間原則配分がPareto最適解でないとすれば何んらかの規準のもとにより良い配分を探索する必要があろう。またリンクの新設に際してもこの判定法を用いて新設によるメリットを比較的簡単に判断することができる。一般に大きなネットワークの配分に対してこの判定法を適用すれば適当な線型変換を行なったとしても，非常に大規模な問題となってくる。従って何んらかの分割も考察しなければならない。

6. 参考文献

志水清孝「システム最適化理論」S．51