IV—4　　カルマンフィルターによる交通状態予測の諸手法

信州大学工学部　奥谷　巖

1．まえがき

筆者は，先にカルマンフィルター理論を使った道路交通状態の予測方法について研究発表を行なったが[1]，それはR.E.Kalman が1960年に提案したCovariance Filter を適用したものであった。しかしながら，このCovariance Filterには，先験的情報が不足しているかあるいはまったくない場合に初期値の与え方に困難が伴なったり，誤差分散共分散行列の半正定値対称行列であるという性質およびその対角要素が非負であるという性質が，計算ステップの進行とともに，いわゆるまるめ誤差等が原因して，崩れることがあるという問題があった。

したがって，今回はそうした問題点を克服するいくつかの手法の導入を試みるとともに，計算手順についても若干ふれる。

2．Covariance Filter による方法[1]

まず最初に，基本モデルとしてCovariance Filterによる方法を再記すると以下のようになる。いま，$x(t)$ を時刻tの各リンクの交通状態量を要素とするn次元ベクトルとしたとき

$$x(t+k)=H^0(t)x(t)+H^1(t)x(t-1)+\cdots\cdots+H^r(t)x(t-r)+w(t) \qquad (1)$$

なる予測モデルを考える。ここに，$H^l(t)$は$x(t-l)$にかかるパラメータから成る行列，$w(t)$は誤差ベクトルである。式(1)は，$h(t)$ を $H^0(t)\sim H^r(t)$ の行ベクトルを順番に並べたベクトル，$\Lambda(t)$を$x(t)\sim x(t-r)$を適当に並べた行列とし，$y(t)=x(t+k)$　としたとき

$$y(t)=\Lambda(t)h(t)+w(t) \qquad (2)$$

となる。この方程式を観測方程式とみなし，さらに

$$h(t+1)=Eh(t)+e(t)=h(t)+e(t) \qquad (3)$$

なるシステム方程式を考える。そうすると$h(\tau)$の最適な推定値$\hat{h}(\tau)$は

$$\hat{h}(\tau)=\hat{h}(\tau-1)+K(\tau)[y(\tau)-\Lambda(\tau)\hat{h}(\tau-1)] \qquad (4)$$

となる。ここに，$K(\tau)$はカルマンゲイン行列で

$$K(\tau)=S(\tau)\Lambda^T(\tau)[R(\tau)+\Lambda(\tau)S(\tau)\Lambda^T(\tau)]^{-1} \qquad R(\tau):w(\tau)\text{の分散行列} \qquad (5)$$

$$S(\tau)=P(\tau-1)+Q(\tau-1) \qquad Q(\tau):e(\tau)\quad〃 \qquad (6)$$

$$P(\tau)=S(\tau)-K(\tau)\Lambda(\tau)S(\tau) \qquad (7)$$

なる漸化式から求められる。このとき$x(t+k)$の予測値$\hat{x}(t+k)$を

$$\hat{x}(t+k)=\Lambda(t)\hat{h}(t-k) \qquad (8)$$

で与える。

3．Information Filter による方法

いま，$\hat{d}(\tau)=P^{-1}(\tau)\hat{h}(\tau) \qquad (9) \qquad d(\tau)=S(\tau)^{-1}E\hat{h}(\tau-1)=S^{-1}(\tau)\hat{h}(\tau-1) \qquad (10)$

としたとき

$$\hat{d}(\tau)=d(\tau)+\Lambda^T(\tau)R^{-1}(\tau)y(\tau) \qquad (11)$$

$$d(\tau)=[E+L(\tau-1)]^{-1}E^{-T}\hat{d}(\tau-1)=[E+L(\tau-1)]\hat{d}(\tau-1) \tag{12}$$

$$S^{-1}(\tau)=[E+L(\tau-1)]^{-1}P^{-1}(\tau-1) \tag{13}$$

$$L(\tau)=P^{-1}(\tau)Q(\tau) \tag{14}$$

$$P^{-1}(\tau)=S^{-1}(\tau)+\Lambda^{T}(\tau)R^{-1}(\tau)\Lambda(\tau) \tag{15}$$

なる関係式が成立する。式(11), (13), (14), (15) はそれぞれ式(4), (6), (5), (7)に対応しており，両モデルは数学的に同値であることは言うまでもない．しかしながら，このInformation Filter を使った方法は，$h(\tau)$ の初期値，$S(\tau)$ の初期値に関する先験的情報がない場合，$\hat{h}^{*}(\gamma)=0,\ S^{-1}(\gamma)=0$ として出発しても問題が生じない点に特徴を有している。

4. Covariance Square Root Filter による方法

いま，$P(\tau)$, $S(\tau)$, $Q(\tau)$ および $R(\tau)$ の Choleski分解行列（下3角行列）をそれぞれ $Y(\tau)$, $W(\tau)$, $U(\tau)$, $V(\tau)$ とすると

$P(\tau)=Y(\tau)Y^{T}(\tau)$ (16)　$S(\tau)=W(\tau)W^{T}(\tau)$ (17)　$Q(\tau)=U(\tau)U^{T}(\tau)$ (18)　$R(\tau)=V(\tau)V^{T}(\tau)$ (19)　なる関係がある。さらに　$F(\tau)=W^{T}(\tau)\Lambda^{T}(\tau)$ (20)　とおき，$[R(\tau)+F^{T}(\tau)F(\tau)]$ なる行列のCholeski 分解行列を$G(\tau)$とすると

$$\hat{h}(\tau)=\hat{h}(\tau-1)+W(\tau)F(\tau)G^{-T}(\tau)G^{-1}(\tau)[y(\tau)-\Lambda(\tau)\hat{h}(\tau-1)] \tag{21}$$

$$Y(\tau)=W(\tau)-W(\tau)F(\tau)G^{-T}(\tau)[G(\tau)+V(\tau)]^{-1}F^{T}(\tau) \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} W^{T}(\tau) \\ \hdashline 0 \end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} Y^{T}(\tau-1) \\ \hdashline U^{T}(\tau-1) \end{bmatrix} \tag{23}$$

となる。ここに，Tは修正されたGram-Schmidt の方法によって構成される正規直交行列である。本方法は$W(\tau)$ の下3角行列である性質を計算ステップに拘わらず保証し，2で述べた方法ではまるめ誤差の影響で $P(\tau)$ が正値対称行列でなくなり，計算続行が困難となる場合でも，$h(\tau)$の推定を行なうことが可能である点を特徴としてもっている。

5. Information Square Root Filter による方法

いま，　$b(\tau)=W^{-1}(\tau)\hat{h}(\tau-1)$　(24)　としたとき

$$T\begin{bmatrix} b(\tau) \\ \hdashline V^{-1}(\tau)y(\tau) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \hat{b}(\tau) \\ \hdashline e(\tau) \end{bmatrix} \quad (25), \qquad T\begin{bmatrix} W^{-1}(\tau) \\ \hdashline V^{-1}(\tau)\Lambda(\tau) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Y^{-1}(\tau) \\ \hdashline 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

なるベクトル $\hat{b}(\tau)$, $e(\tau)$を定義する。そうすると$\hat{h}(\tau)$と$\hat{b}(\tau)$ との関係は

$$Y^{-1}(\tau)\hat{h}(\tau)=\hat{b}(\tau) \tag{27}$$

で与えられる。また，

$$T\begin{bmatrix} U^{-1}(\tau) & 0 \\ \hdashline -Y^{-1}(\tau) & Y^{-1}(\tau) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F(\tau+1) & G(\tau+1) \\ \hdashline 0 & W^{-1}(\tau+1) \end{bmatrix} \quad (28), \qquad T\begin{bmatrix} 0 \\ \hdashline \hat{b}(\tau) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a(\tau+1) \\ \hdashline b(\tau+1) \end{bmatrix} \quad (29)$$

具体的計算手順は，$W^{-1}(0)$と$\hat{h}^{*}(0)(=\hat{h}(-1))$　を与え，$\tau=0$として次のステップで計算してゆく。
（ステップ1）$b(\tau)$ を式(24)から求める。　（ステップ2）式(25)より$\hat{b}(\tau)$ を，式(26)より$Y^{-1}(\tau)$ を求める。　（ステップ3）式(27)より$\hat{h}(\tau)$ を求める。　（ステップ4）式(28)より$W^{-1}(\tau+1)$ を求め，$\tau=:\tau+1$として（ステップ1）へ行く。

(参考文献) 奥谷：カルマンフィルターによる道路交通状態の予測，第33回土木学会年次学術講演会講演概要集，昭和53年9月