

岐阜大学 正会員 安田孝志
 岐阜大学 学生会員 〇 吉川 正
 岐阜大学 学生会員 後藤真太郎

1. 緒言 本研究では、斜面上における有限振幅波の変形特性を究明するため、任意水深場でのK-dV型の高次方程式を誘導し、その数値シミュレーションを実施する。このため、まず、一様水深場での計算を行ない、その数値解の精度を理論的に検討すると同時に、実験結果と比較することにより、用いるべき差分法を決定する。ついで、一様な斜面上での計算にこの方法を適用し、系統的な浅水変形の計算を行なう。

2. 一様水深場における波の変形特性 一様水深場における波動方程式は次式で表わされる。

$$\zeta_t + \frac{3}{2}\zeta\zeta_x + \frac{1}{6}\zeta^3\zeta_x = -\varepsilon\left\{\frac{19}{360}\zeta_x\zeta^3\zeta_x + \frac{5}{6}\zeta_x\zeta^3\zeta_x + \frac{17}{48}\zeta_x\zeta^3\zeta_x - \frac{15}{16}\zeta^2\zeta_x\right\} + O(\varepsilon^2) \quad (1)$$

ここでは、上式を次のような差分式に書き換える。

$$\frac{1}{\Delta t}(Y_{ij}^{n+1} - Y_{ij}^n) + \frac{U_0}{4\Delta x}(Y_{ij+1}^n + Y_{ij}^n + Y_{ij-1}^n)(Y_{ij+1}^{n+1} - Y_{ij}^{n+1} - Y_{ij-1}^{n+1}) + \frac{1}{12(\Delta x)^3}(Y_{ij+2}^{n+1} - 2Y_{ij+1}^{n+1} + 2Y_{ij-1}^{n+1} - Y_{ij-2}^{n+1}) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{\Delta t}(Z_{ij}^{n+1} - Z_{ij}^n) + \frac{U_0}{4\Delta x}(Z_{ij+1}^n + Z_{ij}^n + Z_{ij-1}^n)(Y_{ij+1}^{n+1} - Y_{ij}^{n+1} - Y_{ij-1}^{n+1}) + \frac{U_0}{4\Delta x}(Y_{ij+1}^n + Y_{ij}^n + Y_{ij-1}^n)(Z_{ij+1}^{n+1} - Z_{ij}^{n+1} - Z_{ij-1}^{n+1}) + \frac{1}{12(\Delta x)^3}(Z_{ij+2}^{n+1} - 2Z_{ij+1}^{n+1} + 2Z_{ij-1}^{n+1} - Z_{ij-2}^{n+1}) = \varepsilon F \quad (3)$$

$$\frac{1}{2\Delta t}(Y_{ij}^{n+1} - Y_{ij}^n) + \frac{U_0}{8\Delta x}(Y_{ij+1}^n + Y_{ij}^n + Y_{ij-1}^n)(Y_{ij+1}^{n+1} + Y_{ij}^{n+1} - Y_{ij-1}^{n+1} - Y_{ij-2}^{n+1}) + \frac{1}{24(\Delta x)^3}(Y_{ij+2}^{n+1} + Y_{ij+1}^{n+1} - 2Y_{ij+1}^{n+1} - 2Y_{ij-1}^{n+1} + 2Y_{ij-1}^{n+1} + 2Y_{ij-2}^{n+1} - Y_{ij-1}^{n+1} - Y_{ij-2}^{n+1}) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2\Delta t}(Z_{ij}^{n+1} - Z_{ij}^n) + \frac{U_0}{8\Delta x}(Z_{ij+1}^n + Z_{ij}^n + Z_{ij-1}^n)(Y_{ij+1}^{n+1} + Y_{ij}^{n+1} - Y_{ij-1}^{n+1} - Y_{ij-2}^{n+1}) + \frac{U_0}{8\Delta x}(Y_{ij+1}^n + Y_{ij}^n + Y_{ij-1}^n)(Z_{ij+1}^{n+1} + Z_{ij}^{n+1} - Z_{ij-1}^{n+1} - Z_{ij-2}^{n+1}) + \frac{1}{24(\Delta x)^3}(Z_{ij+2}^{n+1} + Z_{ij+1}^{n+1} - 2Z_{ij+1}^{n+1} - 2Z_{ij-1}^{n+1} + 2Z_{ij-1}^{n+1} + 2Z_{ij-2}^{n+1} - Z_{ij-1}^{n+1} - Z_{ij-2}^{n+1}) = \varepsilon F \quad (5)$$

式(2)および式(3)は、それぞれ前進型の第1次近似式および第2次近似式を示し、また、式(4)および式(5)は、それぞれ中心型の第1次近似式および第2次近似式を表わす。ここで、式(2)および式(5)の右辺の εF は、式(1)の非同次項を表わす。数値計算においては、 $n=1,3,5,\dots$ の奇数時には前進型を用い、 $n=2,4,6,\dots$ の偶数時には中心型を用いる。数値解の精度を理論的に評価するため、初期波として、式(1)の解析解であるソリトン波を与えて計算を行ない、波形およびポテンシャルエネルギーの時間的変化を調べた。図1および図2は、これらの結果を示したものであり、これらから、第1次近似解に関しては波形の時間的変化は極めて小さく、ポテンシャルエネルギーもよく保存されており、数値解は十分な精度を持っていることがわかる。一方、第2次近似解に関しては、波高の減衰が見られ、ポテンシャル

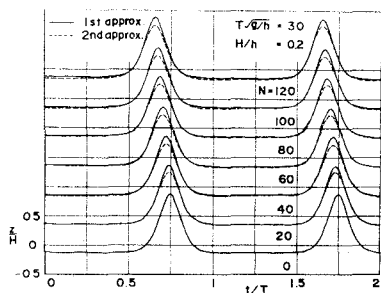


図1 初期波の時間的変化

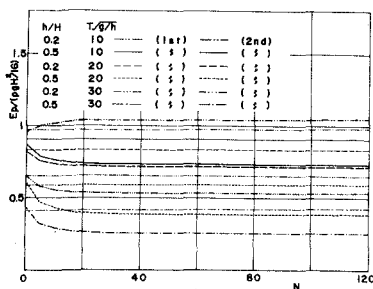


図2 ポテンシャルエネルギーの時間的変化

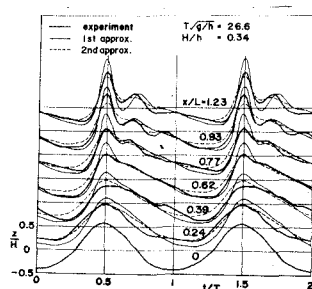


図3 実験値と数値解の比較

エネルギーにも減衰が見られるが、一定値に収束する傾向を示しており、波形自体はほぼ一定であり、数値解としては安定であることがわかる。なお、この減衰は第2次近似解による補正項の減衰によるものと考えられ、ここで用いた差分法によれば、安定な数値解を得ることが可能となっている反面、高次項の補正が急速に減衰するため、その計算の評価には問題のあることがわかる。図3は、計算結果と実験結果との比較の1例を示したものであり、これから、第1次近似解および第2次近似解のいずれも実験結果と対応しており、数値解の適用性がある程度裏付けられたように思われる。以上のことから、第1次近似解および第2次近似解のいずれもほぼ満足のいく精度を持つことがわかった。図4は、初期波に正弦波を与えての変形を示したものであり、第1次近似解および第2次近似解においてほとんど相違がなく、これらから、高次項による補正は極めて小さいことがわかる。

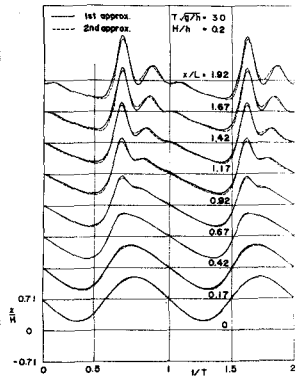


図4 一様水深場での波の変形

3. 一様な斜面上における波の変形特性 一様な斜面上における波動方程式は、次式で表わされる。
- $$\eta_c + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_c \frac{\partial \eta_c}{\partial x} + \frac{\eta_c^2}{6} \right) - \frac{E^*}{4V_0} \eta_c = E \left(-\frac{\eta_c}{L_0} \frac{\partial \eta_c}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_c \frac{\partial \eta_c}{\partial x} \right) - \frac{2}{3V_0} \eta_c \frac{\partial \eta_c}{\partial x} - \frac{2\eta_c}{3} \frac{\partial^2 \eta_c}{\partial x^2} + \frac{E^*}{2} \frac{\partial \eta_c}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_c^2 \right) - \frac{1}{V_0} \eta_c \Omega_c - \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_c \Omega_c \right) - \frac{5E^*}{8V_0} \eta_c + \frac{E^*}{2V_0} \Omega_c \right) + O(E^2) \quad (6)$$
- $$\eta_c = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_c \right) - \frac{\eta_c}{6} \frac{\partial \eta_c}{\partial x} + \frac{E^*}{4V_0} \eta_c, \quad \Omega_c = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\eta_c^2 \right) - \frac{\eta_c}{6} \frac{\partial \eta_c}{\partial x} + \frac{E^*}{4V_0} \int \eta_c dx \quad (7)$$

次に、上式を一様水深場と同様の差分法を用いて計算を行なう。計算は波形勾配 H/L_0 を 0.01 および 0.0008, slope を $1/10$ および $1/50$ としてそれぞれ計算を行なった。図5-A, B, C および D は、これらの結果を示したものであり、これらから、波形勾配が 0.01 のとき、slope が $1/10$ の条件では波形の歪みおよび波高の増大がともに大きくなるが、 $1/50$ の条件では波形の歪みが小さく、波高の増大傾向を示すだけである。また、波形勾配が 0.0008 のときは、slope が $1/10$ および $1/50$ のいずれの場合にも波形の歪みおよび波高の増大がともに大きい。また、 $1/50$ の方が波形の歪みが急速であることがわかる。以上のことから、斜面上では、水深の減少に伴って波高を増大させる浅水効果だけでなく、波形を歪ませる斜面勾配の効果も重要であり、また、波形勾配の相違により、変形特性が変化することわかった。

4. 結語 以上、一様水深場での波の変形に及ぼす高次項の影響はきわめて小さく、実験値との比較からも第1次近似式の適用が十分可能であることが明らかになった。また、斜面勾配の影響は、波形の勾配が小さくなるに従って逆に大きくなることを明らかにした。

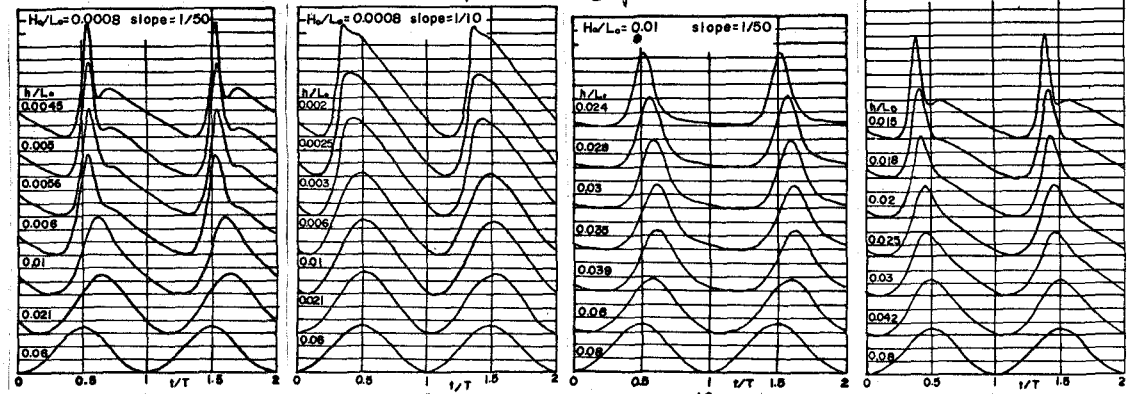


図5 浅水化に伴う波形の変化