II—10　渇水時における利水用貯水池の貯水量の確率論的推定

名古屋工業大学　正　員　長尾正志
学生員　○池田吉隆

1、目的と概要

利水用貯水池の機能評価の手法に、単純マルコフ連鎖理論による独立流量系列とした研究がある。しかし、この手法では、渇水時流況の特徴である流量の持続性，すなわち大きな正相関の存在が無視されていたので、それが成立するための種々の前提や工夫が要求された。そこで、本研究では、渇水時流量系列を自己相関を勘案した単純マルコフ連鎖と仮定して、その分布形には負の二項分布を用いて、貯水量の確率的推定を理論的に解明した。手法的にはランダム・ウォーク理論を適用し、貯水量の定常分布を確率論的に求める手順を記述するとともに、理論の適用例を示す。

2，基礎理論と計算式

i)、流量系列の定式化：流量系列は単純マルコフ連鎖を構成し、かつ定常分布に従うものとして、次のような結合分布，定常分布で定式化する。

$$\left.\begin{aligned} P_{ij} &= P_r[X_t=j \mid X_{t-1}=i] = \sum_{s=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{s}\binom{-i-k}{j-s}(-1)^j\{a(1-\rho)-\rho\}^s\{1+a(1-\rho)\}^{s-k-i-j}\cdot a^{j-s}\cdot(1+a)^{i-s}\cdot(1-\rho)^{i+j-2s} \\ P(i) &= P_r[X_t=i] = \binom{i+k-1}{i}\cdot a^i(1+a)^{-k-i} \qquad (a>0,\ k>0,\ i,j=0,1,2,\cdots) \end{aligned}\right\} \text{-----}(1)$$

すなわち、流量分布は、定常分布母数a，kおよび自己相関係数ρをもつ負の二項分布系列とみなす。

ii)、ランダム・ウォーク理論：時点tの貯水量，$(t-1,t)$の流入量，目標放流量，貯水池容量を、Z_t，X_t，M，K（M,Kは一定）とする。貯水量の純増分は$Y_t=X_t-M$で表わされるので、純増分過程$\{Y_t\}$は流入量過程$\{X_t\}$に支配される確率法則をもつ。その結果貯水量過程$\{Z_t\}$は、両端に不可入壁をもつ飛躍$\{Y_t\}$のランダム・ウォーク粒子の運動に想定できる。以下に、不可入壁と吸収壁の概念を導入し、貯水量過程の数式化を計る。

不可入壁とは、壁に到達した粒子は飛躍$\{Y_t\}$の符号が以前と逆転するまで壁に留まる境界をいう。一方、吸収壁を壁に到達した粒子は以後その位置に停止する境界と定義する。両端に吸収壁をもつ過程と両端に不可入壁をもつ過程の間には、次の双対関係が存在している。

$$Q_t(x)=F_t(K-x) \qquad (0<x<K) \text{ -----(2)},$$

ここに、各記号はつぎのようである。

$Q_t(x)$：両端に吸収壁をもつ場合に、初期位置$Z_0=x$から出発した粒子が、t時点以前に下壁に吸収される確率で、後述のP_Lに対応する。　$F_t(x)$：両端に不可入壁をもつ場合に、上端$Z_0=K$から出発した粒子の位置の累積分布であり、貯水量の定常分布V_iに対応する。

次に、両端に吸収壁がある場合に、上・下端で吸収される確率を得るために、マルコフ連鎖に対するWaldの拡張等式を記す。nを、吸収壁の間に純増分の和$S_n=\sum_{i=1}^{n}Y_i$がない最小の正整数とする。

$$E[\exp(tS_n)\{\lambda(t)\}^{-n}d(t|X_n)]=D(t) \text{ -----(3)},\quad E[\exp(tS_n)|X_0]\sim d(t|X_0)\{\lambda(t)\}^n,\quad D(t)=E[d(t|X_0)] \text{ -----(4)}$$

(3)式はWaldの拡張等式と呼ばれ、一種のスペクトル分解から誘導された式である。$\lambda(t)$は積率母関数化の操作を施した$\{Y_i\}$の確率推移行列の最大固有値である。なお、$\lambda(t)=1$を満す唯一で実の非零解$t=t_0$が存在することが証明されている。

iii)、貯水量の定常確率：初期貯水量$Z_0 = u$（$0<u<K$）から出発して溢水せずに空になる確率P_uを、出発点を原点に移動した座標として、$Z=-u$, $K-u$に吸収壁のあるランダム・ウォーク過程への数式化および、Waldの拡張等式によって求める。(3)式で$t=t_0$とおけば$\lambda(t_0)=1$であり、$e^{t_0}=x_0$と記す。

$$P_u = \{E_2[d(t_0|X_n)x_0^{S_n}] - D(t_0)\} / \{E_2[d(t_0|X_n)x_0^{S_n}] - E_1[d(t_0|X_n)x_0^{S_n}]\} \quad \text{-------- (5)}$$

ここで、E_1, E_2はそれぞれ下端壁，上端壁での吸収に関する条件付き期待値演算を意味する。(5)式における各項を(4)式を考慮して、(1)式の流量分布の下に求めると以下のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
&d(t_0|X_n) = \{\mu_1(1-\mu_2)/(\mu_1-\mu_2)\}^{-k} \cdot [\{1+a(1-\rho)-\mu_1\}/a(1-\rho)x_0]^{X_n}\\
&D(t_0) = \{\mu_1(1-\mu_2)(x_0-\mu_2)/(1-\rho)(\mu_1-\mu_2)x_0\}^{-k}\\
&E_1[d(t_0|X_n)x_0^{S_n}] = \{\sum_{i=0}^{M-1}P(i)d(t_0|i)\sum_{j=0}^{M-i-1}x_0^{-j}\}x_0^{-u} / \sum_{\ell=0}^{M-1}P(\ell)\\
&E_2[d(t_0|X_n)x_0^{S_n}] = \{D(t_0) - \sum_{i=0}^{M}P(i)d(t_0|i)\}x_0^{K-u} / \{1-\sum_{\ell=0}^{M}P(\ell)\}\\
&\mu_1,\mu_2 = \tfrac{1}{2}\left[1+a(1-\rho)-\{a(1-\rho)-\rho\}x_0 \pm \sqrt{\{1+a(1-\rho)-\{a(1-\rho)-\rho\}x_0\}^2 - 4\rho x_0}\right]
\end{aligned}\right\} \quad \text{-------- (6)}$$

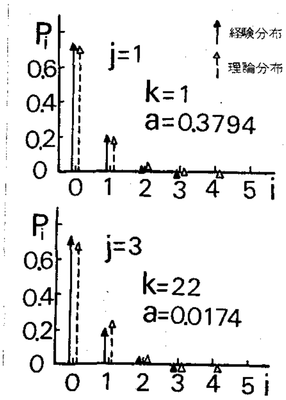
なお、$x_0 = e^{t_0}$は、$\lambda(t_0) = \{\mu_1(t_0)\}^{-k} \cdot e^{-Mt_0} = 1$の解として得られる。

P_uが判れば、(2)式から貯水量の定常分布$V_i = P_r[Z=i]$が計算できる。

$$V_0 = P_{K-M}, \quad V_i = P_{K-M-i} - P_{K-M-i+1} \quad (i=1,2,\cdots K-M-1), \quad V_{K-M} = 1-P_1 \quad \text{----(7)}$$

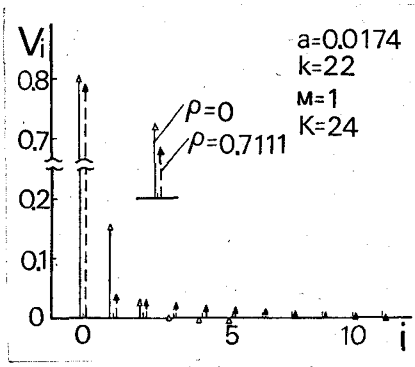
3．適用計算例

i)．流量分布モデルの検討：天竜川美和ダムの昭和34年～45年の各冬期（12月～2月）の½日間総流量を資料とした。自己相関係数は0.7前後であり、流況情報として十分有意であると思われる。図－1は、冬期½日間総流量への負の二項分布の適合例である。各パラメータは積率解によって求めた。横軸1単位は4 m³/sで、3 m³/s未満は常時確保とした。理論分布は経験分布に、ほぼ適合するようである。

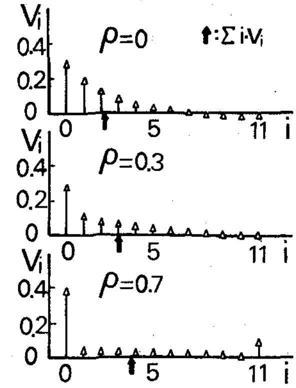


図－1、冬期½日間総流量への負の二項分布の適合

ii)．定常分布の計算例：図－2は、理論の美和ダムへの適用例である。相関の有無の考慮によって、結果にはかなりの相異がみられる。図－3は、相関係数ρの変化による影響を試算したものである。ρの増加とともに両端のV_0, V_{K-M}が極端に増加し、中間的な貯水量分布は平滑化されるとともに微小となる。貯水量の期待値は、ρが1に近づくとともに増加するが、V_0の値も増加して取水不能の危険性が増してくると思われる。



図－2，自己相関係数の考慮の有無と貯水量分布



図－3，相関係数の変化と貯水量分布（$k=4$, $a=0.2$, $M=1$, $K=12$）

参考文献

長尾・池田：流量相関を考慮した利水用貯水池の機能評価に関する確率過程論の応用、水理講演会論文集（1979. 2）