I－9　　粘弾性モデルからなるはり・平板の一動的解析

信州大学工学部　学生員○大　エ　俊　之
〃　　　正　員　草　間　孝　志

I. まえがき　最近、小田桐、能町、角田[1]によって、Voigt（Kelvin）モデルからなる2径間連続ばりに単一走行荷重が作用したときの動的応答について発表がなされている。筆者らも同種の問題として、粘弾性材料からなるはりと平板が単純に支持された場合について、曲げ振動の解析を行なった。[2),3)] しかし、この種の解析結果が、どの程度実際に役立つのか判断がつかぬまま、現在まで発表にはいたらなかったが、ここに、その結果の一部を報告する。計算に用いた粘弾性モデルは、はりの場合には緩和弾性率$E(t)$をMaxwell型とKelvin型とし、平板の場合には、体積変形は弾性（$K$＝一定）、せん断変形の緩和弾性率$G(t)$をMaxwell型とKelvin型と仮定した。

II. 解析について　曲げ剛性が一定で、等質等方な平板およびはりの振動方程式は次のように表わされる。

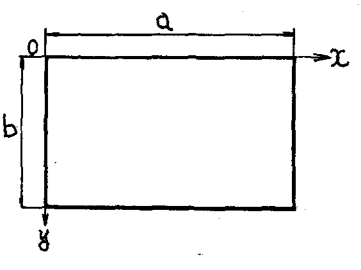
弾性
平板　$$D\nabla^4 w(x,y,t) + \rho h \ddot{w}(x,y,t) = f(x,y,t) \qquad (1)$$
はり　$$EI\,\partial^4 w(x,t)/\partial x^4 + \rho A \ddot{w}(x,t) = f(x,t) \qquad (2)$$

$w$はたわみ，$\rho$は密度，$h$は板厚，$A$は断面積，$f$は外力，$D$，$EI$はそれぞれ平板とはりの曲げ剛性である。Leeの対応原理により、対応する粘弾性解のラプラス変換したものは、次のようになる。

$$D_s(S)\nabla^4 \overline{w}(x,y,S) + \rho h S^2 \overline{w}(x,y,S) = \overline{f}(x,y,S) + 初期項 \qquad (1')$$
$$E_s(S)\,I\,\partial^4 \overline{w}(x,S)/\partial x^4 + \rho A S^2 \overline{w}(x,S) = \overline{f}(x,S) + 初期項 \qquad (2')$$

$D_s$, $E_s$はラプラス像空間での曲げ剛性であり、上式に、対象とするモデルの$D_s$, $E_s$を代入してラプラス逆変換をほどこせば、原空間における粘弾性解を得ることになる。計算例の一部を次に示す。

(1) 単純支持された粘弾性平板の自由振動　境界条件を満足するように、たわみ$w(x,y,t)$を次の2重級数で表わす。



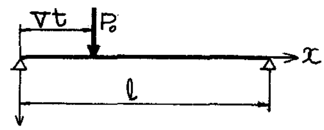

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \phi_{mn}(t)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \qquad (3)$$

両モデルに対する$D_s(S)$と式(3)を式(1′)に代入して$\overline{\phi}_{mn}(S)$について整理すると、それぞれ次のようになる。

$$\overline{\phi}_{mn}(S) = \frac{\alpha_1 S^3 + \alpha_2 S^2 + \alpha_3 S + \alpha_4}{S(S^3 + \beta_1 S^2 + \beta_2 S + \beta_3)} \quad (\mathrm{Maxwell}) \qquad \overline{\phi}_{mn}(S) = \frac{\alpha_1 S^2 + \alpha_2 S + \alpha_3}{S^3 + \beta_1 S^2 + \beta_2 S + \beta_3} \quad (\mathrm{Kelvin})$$

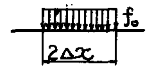
ここに$\alpha_i$, $\beta_i$は初期条件、材料特性によって決まる定数である。上式をラプラス逆変換すれば粘弾性解が得られる訳であるが、分母の3次式の根の取り方によって次の4つの場合に分けられる。

- 異なる3実根$r_i$を持つ場合　$\phi_{mn}(t) = A + \sum_{i=1}^{3} B_i e^{r_i t}$
- 実根$r$と共役複素根$u \pm vi$　$\phi_{mn}(t) = A + Be^{rt} + Ce^{ut}\cos(vt) + De^{ut}\sin(vt)$
- 3重根$r$を持つ場合　$\phi_{mn}(t) = A + (B + Ct + Dt^2)e^{rt}$
- 実根$r$と重根$r'$を持つ場合　$\phi_{mn}(t) = A + Be^{rt} + (C + Dt)e^{r't}$




(2) 走行荷重によるはりの強制振動　単純支持された粘弾性のはり上を荷重が一定速度Vで走行する場合について考える。境界条件を満足するように、たわみ$w$と荷重$f$を次のように表わす。

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),\quad f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}R_n\sin(\lambda_n t)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad (4)$$




ここに$R_n$は、走行荷重が等分布$f_0$では$\frac{4f_0}{n\pi}\cdot\sin\left(\frac{n\pi\Delta x}{l}\right)$，集中荷重$P_0$の場合は$2P_0/l$であり、$\lambda_n=n\pi Vt/l$である。両モデルに対する$E_3(S)$と式(4)を式(2)'に代入して整理すると、次のようになる。

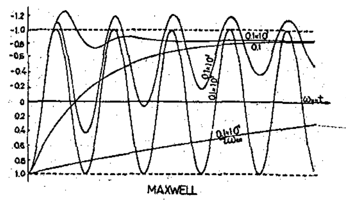
$$\bar{\varphi}_n(S)=\frac{gR_n}{\rho A}\frac{\lambda_n}{S(S^2+\lambda_n^2)}\left[\frac{S+\alpha}{S^2+\beta_1 S+\beta_2}\right]\ (\text{Maxwell}) \qquad \bar{\varphi}_n(S)=\frac{gR_n}{\rho A}\frac{\lambda_n}{S^2+\lambda_n^2}\left[\frac{1}{S^2+\beta_1 S+\beta_2}\right]\ (\text{Kelvin})$$

(1)の場合と同様に、かっこ内の分母の2次式の根の取り方によって原空間の$\varphi_n(t)$はそれぞれ

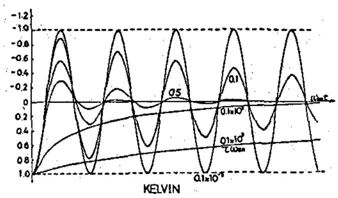
- 2実根$r_i$を持つ場合　$\varphi_n(t)=\frac{gR_n\lambda_n}{\rho A}\left[\sum_{i=1}^{2}Z_i\{A_i+B_ie^{r_it}+C_i\cos(\lambda_nt)+D_i\sin(\lambda_nt)\}\right]$
- 重根$r$を持つ場合　$\varphi_n(t)=\frac{gR_n\lambda_n}{\rho A}\left[A+(B+Ct)e^{rt}+D\cos(\lambda_nt)+E\sin(\lambda_nt)\right]$
- 共役複素根$u\pm vi$　$\varphi_n(t)=\frac{gR_n\lambda_n}{\rho A}\left[A+B\cos(\lambda_nt)+C\sin(\lambda_nt)+De^{ut}\cos(vt)+Ee^{ut}\sin(vt)\right]$

となる。荷重がはり上から通過した場合は、荷重がはりから出た瞬間の状態を初期条件にとって、自由振動として解けばよい。なお、詳細は紙面の都合上割愛する。

Ⅲ. 計算結果　無次元計算をするため、平板では時間について$T=\omega_{E11}t$，材料特性として$\tau\omega_{E11}$なるパラメーターを使用した。ここに$\omega_{E11}$は$m=1$，$n=1$の場合の弾性振動に対する固有円振動数であり、$\tau$は粘性係数とヤング率の比である。$m=1$，$n=1$の振動について考え、初期条件として$w(x,y,0)=\sin(m\pi x/a)\sin(n\pi y/b)$なる初期たわみを仮定した。次に、はりの場合は、前と同様のパラメーターに加え、荷重の走行速度を表わす速度パラメーター$R_V=\lambda_1/\omega_{E1}$を導入して無次元計算をした。図1に平板の自由振動、図2にはりの強制振動の場合の、中央点のたわみの時間的変化を示す。平板、はりのいずれの場合も、材料特性がMaxwellモデルでは$\tau\omega_E=0.1\times10^7$，Kelvinモデルでは$\tau\omega_E=0.1\times10^{-5}$程度の値になると、弾性解と一致し、減衰はせず粘性の影響は見られなかった。



MAXWELL
Fig.1-a



KELVIN
Fig.1-b

(参考文献)


1). 小田桐、能町、角田：Voigtモデルによるはりの走行荷重に対する動的問題　土木学会第33回年次学術講演会講演概要集　1978
2). 土屋：粘弾性平板の準静的ならびに動的問題　信州大学修士論文　1977
3). 大上：粘弾性ばりの動的問題　信州大学卒業論文　1978

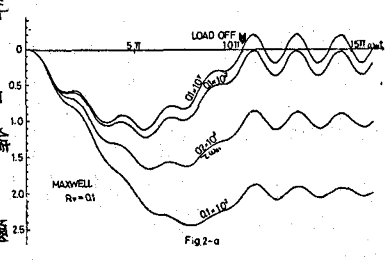



Fig.2-a

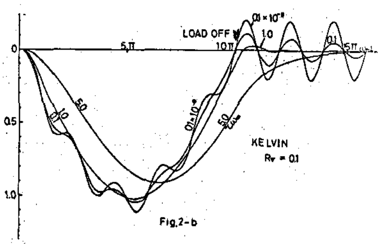


Fig.2-b