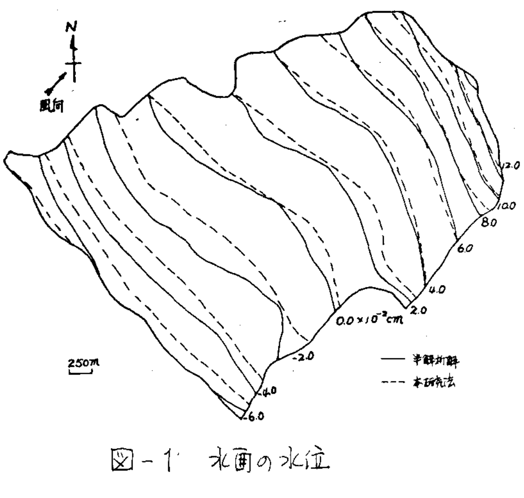
Ⅱ－34

FEMによる湖流解析への一提案

信州大学工学部　正員　荒木　正夫　○富所　五郎

1．まえがき　　湖への流出入がほとんど影響を持たない時の湖水の流動は，主として風によって生じ，この時には湖の大部分において水面と湖底近くで逆の流れが生じている。これに対する数値解析モデルとしては，湖流のように鉛直方向に流速を一定とするモデルでなく，何らかの形で鉛直方向の流速分布を考慮したものでなければならない。前報[1]においては，流れを定常とし，基礎方程式の慣性項（非線形項），水平拡散項を無視して基礎方程式を鉛直方向に積分した式を用いる半解析的数値解析法（以下これによる解を半解析解という。）についてのべた。しかし，この方法は無視した三項のうち一つでも入ると適用できなくなる。本研究はこのような問題をFEMを用い三次元解析しようとするものであるが，近似度を良くし未知量の数を少なくするため鉛直方向には節点なし連続関数で，水平方向には従来のような多項式による試験関数を用いる。このような試験関数を用いると水面と湖底の境界条件が入れ易くなり，また必要データ数も少なくてすむ。

2　基礎方程式の離散化　　水深が浅く，流れの緩な湖の流動を支配する方程式は[2]　$\partial u/\partial t - fv = -1/\rho\cdot\partial p/\partial x + K\cdot\partial^2 u/\partial z^2$ —(1)，$\partial v/\partial t + fu = -1/\rho\cdot\partial p/\partial y + K\cdot\partial^2 v/\partial z^2$ —(2)，$0 = -1/\rho\cdot\partial p/\partial z - g$ —(3)，$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$ —(4)　である。また，境界条件は水面 $z=\zeta$ で $K\cdot\partial u/\partial z = \tau_x$，$K\cdot\partial v/\partial z = \tau_y$，湖底 $z=-h$ で $u=v=w=0$ である。ここに u，v，w は x，y，z 方向の流速で x，y は静水面内で東，北をそれぞれ正とし，z は鉛直方向で上に正で静水面を $z=0$ とする。P は圧力，ρ は水の密度，K は鉛直混合係数，g は重力の加速度，τ_x，τ_y は水面に作用する風によるせん断応力である。ここで，密度を鉛直方向に一定，つまり流れを一層流と仮定し，さらに鉛直混合係数も鉛直方向に一定とする。(3)式を z 方向に積分し，大気圧 $P_a=0$ とすると　$P=\rho g(-z+\zeta)$ となる。これを(1)，(2)式に代入すると(1)，(2)，(4)式は u，v，ζ を未知量とする連立方程式となる。これらの方程式を空間方向に離散化するため，つぎのような試験関数を用いる。$u = (1+z/h)\cdot N_i\cdot u_{1i} + (1+z/h)^2\cdot N_i\cdot u_{2i}$ —(5)，$v = (1+z/h)\cdot N_i\cdot v_{1i} + (1+z/h)\cdot N_i\cdot v_{2i}$ —(6)　$\zeta = N_i\cdot\zeta_i$ —(7)。ここに N_i は水平方向の形状関数で，ここでは三節点三角形要素のものである。上の試験関数は湖底の境界条件を満足している。z 方向の関数 $(1+z/h)$，$(1+z/h)^2$ の項は流れを x，z の二次元とした時，解析的に得られる関数形で，この場合も少ない項数で最も良く流速を近似するものではないかと考えこの関数形とした。$(1+z/h)\cdot N_i$，$(1+z/h)^2 N_i$，N_i を重み関数として基礎方程式を離散化すると，$C\cdot\partial\Phi/\partial t + K\cdot\Phi = F$ —(8)となる。こ



図－1　水面の水位

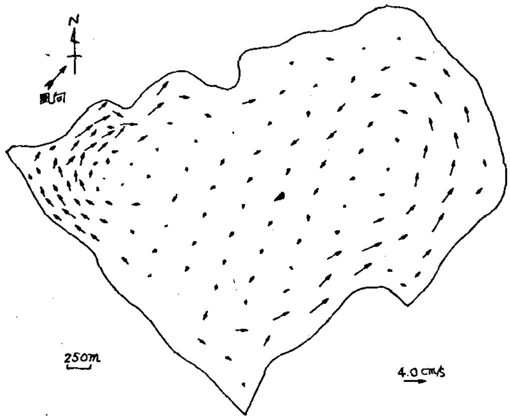
ここに Φ は u_i, v_i, ζ_i などを成分とする列マトリックス，$\mathbb{C}$, $\mathbb{K}$, $\mathbb{F}$ は係数マトリックスである。つぎに時間方向の離散化法として様々な近似法があるが，ここでは $\Phi = (\Delta t - t)/\Delta t \cdot \Phi_t + t/\Delta t \cdot \Phi_{t+\Delta t}$ —(9) の試験関数を用いる有限要素離散によった。この式を(8)式に用いると $t=0$ の初期値より Δt のステップで解を求める marching process となる。

つまり(8)式は，$(\mathbb{C}/\Delta t + 2/3 \cdot \mathbb{K}) \cdot \Phi_{t+\Delta t} + (-\mathbb{C}/\Delta t + 1/3 \cdot \mathbb{K}) \cdot \Phi_t = \mathbb{F}_t$ —(10) となる。これは，差分近似における陰なスキームの一つである Crank-Nicolson 形のスキームによる $(\mathbb{C}/\Delta t + \theta \cdot \mathbb{K}) \cdot \Phi_{t+\Delta t} + \{-\mathbb{C}/\Delta t + (1-\theta) \cdot \mathbb{K}\} \cdot \Phi_t = \theta \mathbb{F}_{t+\Delta t} + (1-\theta)\mathbb{F}_t$ —(11), $0 \leqq \theta \leqq 1$ において $\theta = 2/3$ としたものと右辺を除くと一致する。つまり(10)式は無条件安定である。

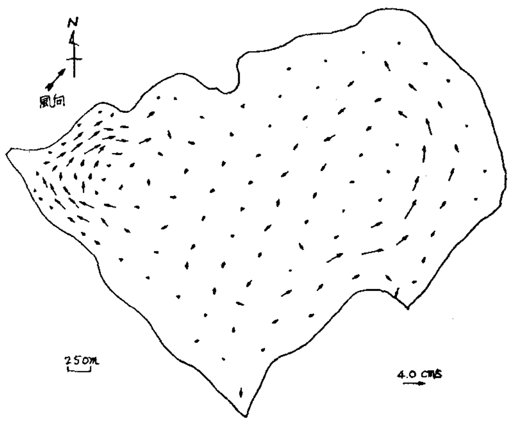
3　半解析解との比較と考察　上のような試験関数を用いた数値解がどの程度の精度を持つか検証するため，諏訪湖をモデルにして半解析解との比較を行なう。解析条件は，半解析的数値解法が適用できるよう，風がない状態に急に風速 3m/s の SW の風が湖面全体に一様に連続して吹くとした。また，湖への流出入は全て無視した。本研究法による解と半解析解との比較として，図－1に水面位，図－2, 3に鉛直方向に平均した流速，図－4に図－2の黒丸点の鉛直方向の流速分布を示す。部分的にはかなりの誤差がみられるが，本研究法の未知量数は三次元有限要素法において鉛直方向に二点の節点を取る時と同じ数であり，それを考えると妥当なものと考えられる。近似度を上げるために $(1+z/h)$ の高次の項を入れることが考えられるが，この多項式では任意の関数は表現できないという欠点がある。したがって，このような場合には任意の関数を表現し得る三角関数などを用いる方がよい。詳しいことは講演時に発表する。なお，本計算には信大データステーションを通じ東大大型計算機を用いた。

1) 余越・富所 "諏訪湖の湖流に関する研究," 31回年講 (1976)

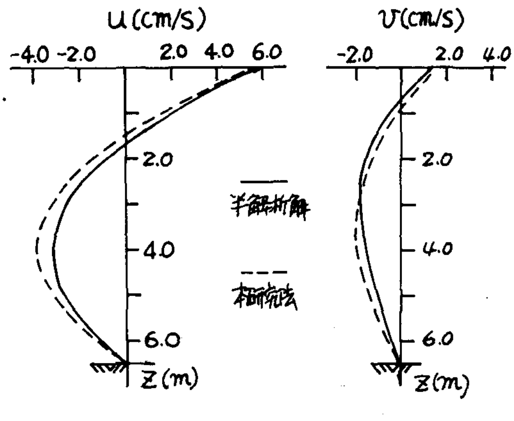
2) J.A. Ligget "Unsteady Circulation in Shallow, Homogeneous Lake", ASCE. HY4. July (1969)



図－2　平均流速（半解析解，風速 3m/s）



図－3　平均流速（本研究法，風速 3m/s）



図－4　流速の鉛直分布