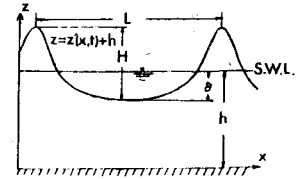


岐阜大学 正会員 守田孝志

岐阜大学 学生会員 〇吉川 正

1. 緒言 本研究では、非線形分散場における高次発展方程式を誘導し、その数値シミュレーションを実施することにより、一様水深場における非線形長波の変形特性およびそれに及ぼす高次項の影響の究明を図る。

2. 高次発展方程式の誘導 非回転流体場での波動運動を考え、座標および記号を図-1のように定めれば、基礎方程式は次式で表わされる。



$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0, \quad \phi_t + (\phi_x^2 + \phi_z^2)/2 + g z' |_{z=h+z} = 0 \\ z_t + z_x \phi_x - \phi_z |_{z=h+z} &= 0, \quad \phi_z |_{z=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、 g : 重力の加速度、 ϕ : 速度ポテンシャル、 h : 平均水深、および z : 平均水深からの水位変動である。つぎに、次式のように無次元量を定義する。

$$\phi^* = \phi / h \sqrt{g h}, \quad x^* = x / h, \quad z^* = z / h, \quad z'^* = z' / h, \quad t^* = t \sqrt{g / h} \quad (2)$$

式(1)に式(2)および次式の Gardner-Morikawa 変換

$$\xi = \varepsilon^{1/2} (x^* - t^*), \quad \tau = \varepsilon^{3/2} t^*, \quad \zeta = z^*, \quad \varepsilon = (h/L)^2 \quad (3)$$

を適用し、さらに次式のせつ動解

$$z^*(x^*, t^*) = \varepsilon \eta(\xi, \tau) + \varepsilon^2 \zeta(\xi, \tau) + \dots, \quad \phi^*(x^*, z^*, t^*) = \varepsilon^{1/2} \{ \phi_1(\xi, \zeta, \tau) + \varepsilon \phi_2(\xi, \zeta, \tau) + \dots \} \quad (4)$$

を適用する。これより、水面変動 η に関する高次発展方程式が次式のように導かれる。

$$\eta_t + 3 \eta \eta_\xi / 2 + \eta_{\xi\xi\xi} / 6 = -\varepsilon \left\{ \eta \eta_{\xi\xi\xi\xi} / 180 + 3 \eta_\xi \eta_{\xi\xi} / 4 + \eta \eta_{\xi\xi\xi} / 6 - 3 \eta^2 \eta_\xi / 4 + \eta_{\xi\xi} \Omega_t + \Omega_{\tau\xi} / 2 \right\} + O(\varepsilon^2) \quad (5)$$

ここに、 η および Ω の関係、また、 η と z^* および Ω と ϕ^* の関係は次の通りである。

$$\Omega_\xi - \eta = \varepsilon \{ \Omega_\tau + \eta^2 / 2 + \eta_{\xi\xi} / 2 \} + O(\varepsilon^2), \quad z'^* = \varepsilon \eta, \quad \phi^* = \varepsilon^{1/2} (\Omega - \varepsilon \eta^2 \Omega_{\xi\xi} / 2 + \dots) \quad (6)$$

3. 数値計算の方法 式(5)を用いて数値シミュレーションを実施するのであるが、その前にまず、初期波の規準化を行なうため、次式の変形を式(5)に適用する。

$$Y = z' / H = (H L^2 / h^3)^{-1} \eta = U_\eta \eta \quad (7)$$

ついで、速度ポテンシャル Ω に対して次式の関係を設定する。

$$\left. \begin{aligned} \Omega_\tau &= -3 \eta^2 / 2 - \eta \eta_{\xi\xi\xi} / 6 \eta_\xi, \quad \Omega_{\tau\xi} = 9 \eta^2 \eta_\xi / 2 + 3 \eta \eta_{\xi\xi\xi} / 2 - \eta^2 \eta_{\xi\xi\xi} / 4 \eta_\xi^2 \\ &\quad - \eta \eta_{\xi\xi\xi}^2 / 36 \eta_\xi^2 + 3 \eta^2 \eta_{\xi\xi} / 4 \eta_\xi + \eta \eta_{\xi\xi\xi\xi} / 4 \eta_\xi + \eta \eta_{\xi\xi\xi\xi\xi} / 36 \eta_\xi + \eta_{\xi\xi\xi}^2 / 36 \eta_\xi \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

これより、式(5)は Y のみに関する発展方程式として次式のように書き換えられる。

$$\left. \begin{aligned} Y_t + 3 Y Y_\xi / 2 + Y_{\xi\xi\xi} / 6 &= -\varepsilon \left\{ 7 Y_{\xi\xi\xi\xi\xi} / 180 + 3 U_\eta Y_\xi Y_{\xi\xi} / 4 + 3 U_\eta Y Y_{\xi\xi\xi} / 4 - U_\eta^2 Y^2 Y_{\xi\xi\xi} / 8 Y_\xi^2 \right. \\ &\quad \left. - Y Y_{\xi\xi\xi}^2 / 72 Y_\xi^2 + 3 U_\eta Y Y_{\xi\xi} / 8 Y_\xi + U_\eta Y^2 Y_{\xi\xi\xi} / 8 Y_\xi + Y Y_{\xi\xi\xi\xi\xi} / 72 Y_\xi + Y_{\xi\xi\xi}^2 / 72 Y_\xi \right\} + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

さらに、上式を収束条件および安定条件を満足する差分方程式に書き換える。式(9)の右辺には微小パラメータ ε が掛かっているものの、6階の微係数が含まれており、その差分化には問題が多い。そこで、せつ動法に準じた方法で計算を行うこととし、式(9)を次式のように書き換える。

$$Y_{1t} + 3U_s Y_{1t} Y_{1t} / 2 + Y_{1t} / 6 = 0 \quad (10)$$

$$Y_{2t} + 3U_s (Y_{1t})_t / 2 + Y_{2t} / 6 = -\epsilon \{ 7Y_{1t} Y_{1t} / 180 + 3U_s Y_{1t} Y_{1t} / 4 + 3U_s Y_{1t} Y_{1t} / 4 - U_s Y_{1t}^2 Y_{1t} / 8 Y_{1t}^2 - Y_{1t} Y_{1t}^2 / 72 Y_{1t}^2 + 3U_s Y_{1t} Y_{1t}^2 / 8 Y_{1t} + U_s Y_{1t}^2 Y_{1t} / 8 Y_{1t} + Y_{1t} Y_{1t} Y_{1t} / 72 Y_{1t} + Y_{1t}^2 / 72 Y_{1t} \} \quad (11)$$

$$Y = Y_1 + \epsilon Y_2 \quad (12)$$

すなわち、まず式(10)を用いて Y_1 を求め、ついで式(11)より Y_2 を求め、最後に式(12)より Y を導く。この場合、式(10)については何ら問題はないが、式(11)については安定性の検討が困難なため、同次式の場合について検討を行ない、極力安定な差分スキームが得られるよう工夫する。しかしながら、安定条件および収束条件の検討だけでは式(10)および(11)に対する最適な差分式を決定できないため、実際の計算では、計算条件に応じて種々の差分式を組み合わせ、精度の良い数値解が得られるよう実践的に処理を行う。用いる差分式の一例を次式に示す。

$$(Y_{1j}^{n+1} - Y_{1j}^n) / \Delta t + U_s (Y_{1j+1}^n + Y_{1j}^n + Y_{1j-1}^n) (Y_{1j+1}^{n+1} - Y_{1j-1}^{n+1}) / 4 \Delta x + (Y_{1j+2}^{n+1} - 2Y_{1j+1}^{n+1} + 2Y_{1j-1}^{n+1} - Y_{1j-2}^{n+1}) / 12 (\Delta x)^3 = 0 \quad (13)$$

$$(Y_{2j}^{n+1} - Y_{2j}^n) / \Delta t + U_s (Y_{2j+1}^n + Y_{2j}^n + Y_{2j-1}^n) (Y_{2j+1}^{n+1} - Y_{2j-1}^{n+1}) / 4 \Delta x + U_s (Y_{2j+1}^n + Y_{2j}^n + Y_{2j-1}^n) (Y_{1j+1}^{n+1} - Y_{1j-1}^{n+1}) / 4 \Delta x + (Y_{2j+2}^{n+1} - 2Y_{2j+1}^{n+1} + 2Y_{2j-1}^{n+1} - Y_{2j-2}^{n+1}) / 12 (\Delta x)^3 = \epsilon F \quad (14)$$

ここで、 F は式(11)の右辺の非同次項を示す。

4. 数値解の精度 数値解の精度を検討するため、初期波として式(5)の解析解であるクノイド波を与えて計算し、用いる差分式において元式の解析解がどの程度満足されているかを調べる。ここでは、初期波の時間的変化が無視できる場合に、満足すべき差分式が得られたものと考え、まずポテンシャルエネルギーの時間的変化について検討した。図-2はその結果を示したものであり、横軸の N は繰り返し回数を示し、 $\tau/T = N/60$ の関係がある。第1次近似解については全般的に良好な結果が得られているが、第2次近似解については波の非線形性が卓越するに従って数値誤差の累積も顕著になっていることがわかる。したがって、第2次近似解については、さらに差分式の誘導に若干の工夫が必要と言えよう。図-3は $H/h = 0.2$ および $T\sqrt{g/h} = 20$ の場合について各 N に対する波形の変化を示したもので、定形波の場合については近似による相違は小さく、いずれの解も安定であることがわかる。

6. 結 語 以上、高次発展方程式を導き、その数値解の精度について検討を行い、ほぼ満足すべき差分式が得られたことを示した。講演時には、この結果を用いて波の変形特性について行った詳細な検討結果を述べることにする。最後に、本研究に対し、御指導をたまわった京都大学防災研究所土屋義人教授に深謝するとともに、助力を得た竹中純君に感謝する。

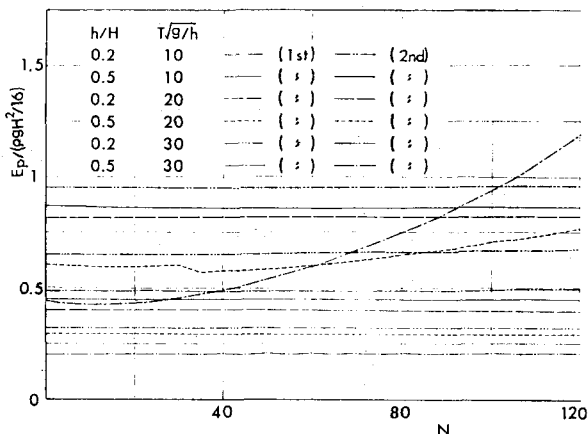


図-2 ポテンシャルエネルギーの時間的変化

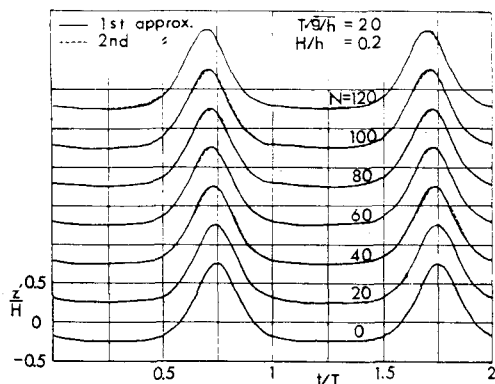


図-3 波形の時間的変化