Ⅱ－16

信頼性理論の水工システム計画への適用 ──相関システムの理論解析として──

名古屋工業大学　正員　長尾正志

1. 水工問題としての信頼性理論の問題点

システムの信頼性を評価する信頼性理論は，治水・利水を対象とする水工問題に対しては必ずしも満足すべきものではない。その主原因は，現在の信頼性理論はほとんど独立成分で構成されているシステムを対象としていることであろう。たとえば1本の河道の隣接2地点で堤防の破壊問題を考えると，どちらかの地点で破堤したときには，氾濫が安全弁として作用し，他方はかなり安全度が増す。すなわち，破堤確率として構成要素間には負相関が存在することになる。つぎに，同じ流域内の隣接2支川からの取水を考えると，渇水が問題になるような事態では，取水量の間にはかなり大きな正相関が存在することになる。

このような相関を考慮したシステムの信頼性理論を一般的に展開することは容易ではないが，ごく単純な場合として，二成分で正規分布，指数分布から解析に着手したので，その結果を報告する。

2. 相関システムの基礎理論

2.1 信頼性の定義と評価

信頼性をシステムの要素や全体の寿命で考える。たとえばシステムの寿命を $\mathcal{Z}$ と記し，確率変数とみなすと，その累積分布 $F_{\mathcal{Z}}(z)=P_r\{\mathcal{Z}\leq z\}$，超過確率 $1-F$，密度分布 $f_{\mathcal{Z}}(z)$ は，それぞれ累積故障率，信頼性関数，故障率分布といわれ，これらが信頼性評価の基礎となる。

2.2 システム構成

システムの信頼性を推定するには，構成要素がどのように組合せられているかを知る必要がある。すなわち，システムの機能ブロック・ダイアグラムを作り，各要素機能の接続関係から，信頼性をブロックごとに推定しながら，その結果を総合して全システムにまで拡張していくことになる。ところで，要素機能の接続には，以下の三つの場合が基本的に重要であろう。図-1 (a), (b), (c) 参照

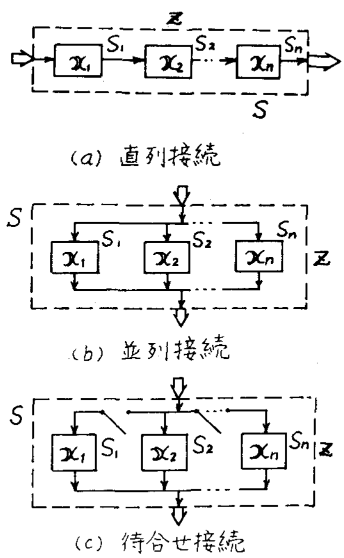
a. 直列接続　n コの成分からなるシステム S において，そのうち少なくとも1コが故障する（本来の機能が発揮できない）とき，システム S が故障するならば，このシステムを直列接続という。たとえば，1本の送水管路の各所で取水する場合における大規模地震などによる被害を考える問題などである。この場合，合成システム S の寿命時間 x は，各要素の寿命時間を x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ として，次式で規定される。

$$\mathcal{Z}=min\,(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \qquad (1)$$

b. 並列接続　上述の場合，すべての成分が故障するときにのみシステムが故障するならば，このシステムを並列接続という。たとえば，各支川のダムからの取水を集めて，ごく小規模の利水に充てるような場合であろう。この場合，合成システムの寿命は，次式で規定される。

$$\mathcal{Z}=max\,(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \qquad (2)$$

c. 待合せ接続　たとえば，成分1を作動させ，これが故障したら直ちに成分2に切り換え作動させ，以下同様にして成分 n が故障す



(a) 直列接続

(b) 並列接続

(c) 待合せ接続

図-1　システム構成

るまで切り換え作動を続けるシステムで，その寿命は次式となる。　$z=\sum_{i=1}^{n} x_i$　(3)
これは，たとえば団地住民への必要最低限度の水確保を，給水車に依存する場合などであろう。

さて，以上の各構成に対して，累積故障率または故障率分布が表式的に求められねばならないが，任意の多変数についての表現はかなり複雑になるので，以下では二成分システムのみについて述べる。

3. 二成分システムの信頼性

3.1 二変数一般分布の場合

ここで，$x_1=x$，$x_2=y$とし，たとえばxの累積分布，密度分布を$F_x(x)$，$f_x(x)$，さらにその組合せ（x，y）の結合累積分布，結合密度分布を$F_{xy}(x,y)$，$f_{xy}(x,y)$と記すと，求める累積故障率（累積分布）などは，若干の演算によって，表-1のようになる。表では，独立の場合および対称分布の場合を併記している。ここで，実用性を考えて，以上の結合分布$F_{xy}(x,y)$に，水工問題で多用される具体的な分布形を適用しよう。以下では，規準正規分布と規準指数分布の解析結果を表示する。

表-1　二変数一般分布の累積故障率・故障率分布

構成	状態	累積故障率 $F_z(z)$	故障率分布 $f_z(z)$
直列	従属	$F_x(z)+F_y(z)-F_{xy}(z,z)$ (対称分布 $2F_x(z)-F_{xy}(z,z)$)	$f_x(z)+f_y(z)-\int_{-\infty}^{z} f_{xy}(z,y)dy-\int_{-\infty}^{z} f_{xy}(x,z)dx$ (対称分布 $2f_x(z)-2\int_{-\infty}^{z} f_{xy}(x,z)dx$)
	独立	$F_x(z)+F_y(z)-F_x(z)\cdot F_y(z)$	$f_x(z)[1-F_y(z)]+f_y(z)[1-F_x(z)]$
並列	従属	$F_{xy}(z,z)$	$\int_{-\infty}^{z} f_{xy}(z,y)dy+\int_{-\infty}^{z} f_{xy}(x,z)dx$
	独立	$F_x(z)\cdot F_y(z)$	$f_x(z)\cdot F_y(z)+f_y(z)\cdot F_x(z)$
待合せ	従属	$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{z-y} f_{xy}(x,y)dx\right)dy$	$\int_{-\infty}^{\infty} f_{xy}(z-y,y)dy$
	独立	$\int_{-\infty}^{\infty} f_y(y)\left(\int_{-\infty}^{z-y} f_x(x)dx\right)dy$	$\int_{-\infty}^{\infty} f_x(z-y)\cdot f_y(y)dy$

3.2 二変数規準正規分布

規準化変量 $\xi=(x-m_x)/\sigma_x$，$\eta=(y-m_y)/\sigma_y$ に対するシステムの寿命zをζと記すと，表-1に対応して表-2が得られる。(m_x，σ_x：xの平均，標準偏差）この密度分布を調べると，待合せ接続では正規分布（対称形）であるが，直列・並列接続では相関係数ρが1より小さくなるにつれて非対称性が顕著になること，直列と並列では$\zeta=0$に関して対称であることなどが明らかになる。

表-2　二変数規準正規分布の累積故障率・故障率分布

構成	状態	累積故障率 $F_\zeta(\zeta)$	故障率分布 $f_\zeta(\zeta)$
直列	従属	$1-L(\zeta,\zeta;\rho)$	$2\varphi(\zeta)\left[1-\Phi\left(\frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}}\zeta\right)\right]$
	独立	$2\Phi(\zeta)-[\Phi(\zeta)]^2$	$2\varphi(\zeta)[1-\Phi(\zeta)]$
並列	従属	$L(\zeta,\zeta;\rho)+2\Phi(\zeta)-1$	$2\varphi(\zeta)\Phi\left(\frac{\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}}\zeta\right)$
	独立	$[\Phi(\zeta)]^2$	$2\varphi(\zeta)\Phi(\zeta)$
待合せ	従属	$\Phi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2(1+\rho)}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2(1+\rho)}}\cdot\varphi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2(1+\rho)}}\right)$
	独立	$\Phi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\varphi\left(\frac{\zeta}{\sqrt{2}}\right)$
記号		$\varphi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi^2/2}$, $\Phi(\zeta)=\int_{-\infty}^{\zeta}\varphi(u)du$, $L(h,k;\rho)=\int_{h}^{\infty}\int_{k}^{\infty} f_{\xi\eta}(\xi,\eta)d\xi d\eta$	

3.3 二変数規準指数分布

規準化変量 $\xi=x/m_x$，$\eta=y/m_y$ に対するシステムの寿命をζと記すと，結果は表-3となる。（I_0：0次の変形ベッセル関数）この場合，密度分布の形は，直列接続では単調減少，並列・待合せでは，$\rho\neq 1$の場合，一般に正の歪をもつ単峰の非対称形で，ρが1に近づくに従って非対称性が顕著になることなどが分る。

表-3　二変数規準指数分布の累積故障率・故障率分布

構成	状態	累積故障率 $F_\zeta(\zeta)$	故障率分布 $f_\zeta(\zeta)$
直列	従属	$2(1-e^{-\zeta})-2\int_0^{\zeta} e^{-u}F_\rho(u\|u)du$	$2e^{-\zeta}\{1-F_\rho(\zeta\|\zeta)\}$
	独立	$1-e^{-2\zeta}$	$2e^{-2\zeta}$
並列	従属	$2\int_0^{\zeta} e^{-u}\cdot F_\rho(u\|u)du$	$2e^{-\zeta}F_\rho(\zeta\|\zeta)$
	独立	$(1-e^{-\zeta})^2$	$2e^{-\zeta}(1-e^{-\zeta})$
待合せ	従属	$1-\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\left\{(1+\sqrt{\rho})\exp\left(-\frac{\zeta}{1+\sqrt{\rho}}\right)-(1-\sqrt{\rho})\exp\left(-\frac{\zeta}{1-\sqrt{\rho}}\right)\right\}$	$\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\left\{\exp\left(-\frac{\zeta}{1+\sqrt{\rho}}\right)-\exp\left(-\frac{\zeta}{1-\sqrt{\rho}}\right)\right\}$
	独立	$1-e^{-\zeta}(1+\zeta)$	$\zeta e^{-\zeta}$
記号		$F_\rho(\zeta\|\zeta)=\frac{1}{1-\rho}\exp\left(-\frac{\rho\zeta}{1-\rho}\right)\int_0^{\zeta}\exp\left(-\frac{\xi}{1-\rho}\right)\cdot I_0\left(\frac{2\sqrt{\rho\zeta}}{1-\rho}\sqrt{\xi}\right)d\xi$	

これら理論の相関係数をパラメーターとして図化した結果や，規準化変量でない場合の適用などについては講演時に発表する。