交通情報に関する一考察

信州大学　正員　奥谷　巌

1．まえがき　今回は交通情報のうちで最も基本的な量である交通量，交通密度，速度に関して基礎的な関係式を再考し，また交通信号の影響を考慮した場合にはそれらの変量あるいは相互間の関係の性質はどのようになるかについて検討してみた。

2．交通量，密度および速度の関係　交通量をq，密度をk，速度をvとしたとき，$q=k\cdot v$なる関係式があることは周知の事実であるが，q，k，vそれぞれが確率分布をなす場合の関係式はどのようになるかについて考えてみる。いま，$P_n(L)$：距離L内にn台の車が存在する確率，$f_s(v)$：車の速度がvである確率密度（空間分布）とすると，交通量計測地点から計って上流側vなる長さの区間内に，$[v, v+\Delta v]$の範囲の速度を有する車がm台いる確率$P_m^v(v)$は次式で表わされる。

$$P_m^v(v)=\sum_{n=m}^{\infty}P_n(v)\cdot{}_nC_m(f_s(v)\Delta v)^m(1-f_s(v)\Delta v)^{n-m} \qquad (1)$$

式(1)を利用すると　$P_0^v(v)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(v)\cdot{}_nC_0\cdot(1-f_s(v)\Delta v)^n=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(v)\cdot\{1-nf_s(v)\Delta v+O(\Delta v)\}$ $=1-f_s(v)\Delta v\cdot\sum_{n=0}^{\infty}nP_n(v)+O(\Delta v)=1-\bar{n}f_s(v)\Delta v+O(\Delta v)$　(2)　となる。ここに，$\bar{n}$はvなる長さの区間内にいる車の台数の期待値であるが，平均交通密度$\bar{k}$を用いると　$\bar{n}=\bar{k}\cdot v$　(3)　のように表わされる。したがって，式(3)を式(2)に代入すると結局　$P_0^v(v)=1-\bar{k}\cdot vf_s(v)\Delta v+O(\Delta v)$　(4)　のようになる。同様にして　$P_1^v(v)=\bar{k}\cdot vf_s(v)\Delta v+O(\Delta v)$　(5)　$P_m^v(v)=O(\Delta v)$　$(m\geqq 2)$　(6)　が得られる。一方，単位時間内にvなる速度の車が交通量計測地点を通過する台数をq_vとすると　$q=q_{\Delta v}+q_{2\Delta v}+\cdots\cdots+q_{\eta\Delta v}+\cdots\cdots$　(7)　なる関係がある。したがって　$\bar{q}=\bar{q}_{\Delta v}+\bar{q}_{2\Delta v}+\cdots\cdots+\bar{q}_{\eta\Delta v}+\cdots\cdots$　(8)　となるが，$\bar{q}_{\eta\Delta v}$は式(4)～式(6)を用いて　$\bar{q}_{\eta\Delta v}=\sum_{m=0}^{\infty}m\cdot P_m^{\eta\Delta v}(v)=\bar{k}\cdot(\eta\Delta v)f_s(\eta\Delta v)\Delta v+O(\Delta v)$　(9)　のように表わされるから，これを式(8)に代入し，$\Delta v\to 0$とすると，　$\bar{q}=\int_0^{\infty}\bar{k}\cdot vf_s(v)dv=\bar{k}\cdot\int_0^{\infty}vf_s(v)dv=\bar{k}\cdot\bar{v}_s$　(10)　となる。すなわち，各変量が確率分布をする場合には，それぞれの期待値間で従来の関係式が成立する。

3．空間速度分布と時間速度分布の関係　いま，$f_t(v)$を時間的速度分布を規定する確率密度とすると，式(1)と同様な考え方から，単位時間に交通量計測地点を通過する車のうちm台が速度vである確率P_m^vは　$P_m^v=\sum_{n=m}^{\infty}P_n\cdot{}_nC_m(f_t(v)\Delta v)^m(1-f_t(v)\Delta v)^{n-m}$　(11)　となる。ここに，P_nは交通量がnである確率である。式(11)を利用すると，式(5)に対応して　$P_1^v=\bar{q}\cdot f_t(v)\Delta v+O(\Delta v)$　(12)　が得られる。式(5)および式(12)はいずれも単位時間内に交通量計測地点を通過する車のうち1台が速度vである確率を意味しているから，両者を等しいとおき$\Delta v\to 0$とすると　$\bar{k}\cdot vf_s(v)=\bar{q}\cdot f_t(v)$　なる関係が成立し，これより結局　$f_t(v)=(v/\bar{v}_s)\cdot f_s(v)$　(13)　が得られる。これは従来から用いられている$f_t(v)$と$f_s(v)$の関係に一致するわけであり，ここではその関係を従来の方法とは別の観点から導いたということである。

4．交通信号の影響を考慮した交通量，密度，速度の特性と相互関係

今回は簡単のために次のようなモデルに従って解析を行なう。すなわち，長さLなる区間（街路区間に対応）を考え，その上流側からq_0なる定常的な交通量の流れがあり，それが下流端でCなる時間

（信号の周期に対応）ごとに，τ 時間（信号の赤時間に対応）ブロックされる状況を考える。まず，記号を　v_f：自由走行速度　k_j：最大交通密度　k_0, v_0：q_0 に対応する密度および速度　p：一般に交通密度を k としたとき，それを k_j で除した相対的密度（k にサフィックスがついている場合には，同じサフィックスを p に付けて表わすものとする）　θ：ブロックが終った時点を原点としたときの時間　ξ：区間 L の下流端を原点とし，下流に向って測った距離

a. 平均交通密度　$\theta=-\tau$ の時点から交通流はブロックされることになるが，この時点から上流側に向って衝撃波が発生する。いま，その軌跡を $\xi^{I}(\theta)$ とすると　$\xi^{I}(\theta)=\{(k_0-k_j)/(q_0-0)\}(\theta+\tau)=v_f(1-p_0-p_j)(\theta+\tau)=-v_f p_0(\theta+\tau)$　(14)　となる。ただし，ブロックがない交通流の性質として　$v=v_f(1-p)$　(15)　$q=kv$　(16)　なる関係式を仮定するものとする。$[-\tau, 0]$ の時間内においては，$[-L, \xi^{I}(\theta)]$ なる区間の任意点の交通密度は k_0 であり，$[\xi^{I}(\theta), 0]$ なる区間の任意点の交通密度は k_j である。したがって，いま一般に (θ, ξ) 点の交通密度を $k(\theta, \xi)$ としたとき，平均交通密度 $\bar{k}$ は　$\bar{k}=\{\int_{-\tau}^{C-\tau}\int_{-L}^{0} k(\theta,\xi)\,d\xi\,d\theta\}/LC$　(17)　として表わされるわけであるが，この式の分子の $[-\tau, 0]$ の積分値 A_1 として次式が得られる。　$A_1=\int_{-\tau}^{0}\int_{-L}^{\xi^{I}(\theta)} k_0\,d\xi\,d\theta+\int_{-\tau}^{0}\int_{\xi^{I}(\theta)}^{0} k_j\,d\xi\,d\theta$　(18)　次に，$\theta=0$ 以降は，ブロックが終了して車は下流端から順次加速しながら走行を始め，密度の異なる発進波が次々に上流側に伝播する。いま，密度 p なる発進波の軌跡を ξ とすると，$d\xi/d\theta=dq/dk=v_f(1-2p)$　(19)　なる微分方程式が得られ，これを解いて　$\xi=v_f(1-2p)\theta$　(20)　となる。とくに，$p=p_j(=1)$ なる発進波は最も早く上流側に伝播するが，その軌跡を $\xi^{II}(\theta)$ とすると，式(20)より　$\xi^{II}(\theta)=v_f(1-2p_j)\theta=-v_f\theta$　(21)　となる。$\xi^{I}(\theta)$ と $\xi^{II}(\theta)$ の交点を (θ_u, ξ_u) とすると，$\theta_u=\{p_0/(1-p_0)\}\cdot\tau$　(22)　となる。$[0, \theta_u]$ の時間範囲においては，$[-L, \xi^{I}(\theta)]$ の区間の密度は k_0，$[\xi^{I}(\theta), \xi^{II}(\theta)]$ 区間の密度は k_j，$[\xi^{II}(\theta), 0]$ 区間の (θ, ξ) 点の密度は，式(20)より　$k=k_j p=k_j\{1-\xi/(v_f\theta)\}/2$　(23)　となるから，式(17)の分子の $[0, \theta_u]$ の積分値 A_2 は

$A_2=\int_{0}^{\theta_u}\int_{-L}^{\xi_I(\theta)} k_0\,d\xi\,d\theta+\int_{0}^{\theta_u}\int_{\xi^{I}(\theta)}^{\xi^{II}(\theta)} k_j\,d\xi\,d\theta+\int_{0}^{\theta_u}\int_{\xi^{II}(\theta)}^{0} k_j\{1-\xi/(v_f\theta)\}/2\,d\xi\,d\theta$　(24)　となる。θ_u 以降の衝撃波の軌跡 $\xi^{III}(\theta)$ は　$d\xi^{III}(\theta)/d\theta=v_f(1-p_0-p)$　(25)　なる基本式で p が式(23)のように与えられることから，　$\xi^{III}(\theta)=v_f(1-2p_0)\theta-2v_f(1-p_0)\sqrt{\theta_u}\sqrt{\theta}$　(26)　となり，$\xi^{III}(\theta)=0$ となる時刻 θ_w は

$\theta_w=4\{(1-p_0)/(1-2p_0)\}^2\cdot\theta_u$　(27)　として求められる。$[\theta_u, \theta_w]$ なる時間範囲においては，$[-L, \xi^{III}(\theta)]$ 区間の密度が k_0，$[\xi^{III}(\theta), 0]$ 区間の密度が式(23)で与えられるから，式(17)の分子の $[\theta_u, \theta_w]$ の積分値を A_3 とすると　$A_3=\int_{\theta_u}^{\theta_w}\int_{-L}^{\xi^{III}(\theta)} k_0\,d\xi\,d\theta+\int_{\theta_u}^{\theta_w}\int_{\xi^{III}(\theta)}^{0} k_j\{1-\xi/(v_f\theta)\}/2\,d\xi\,d\theta$　(28)　となる。$[\theta_w, C-\tau]$ なる時間では区間全体が k_0 なる一定密度となるので，式(17)に対応する積分値 A_4 は　$A_4=k_0\cdot L\cdot(C-\tau-\theta_w)$　(29)　で与えられる。式(18), (24), (28), (29)を利用して結局　$\bar{k}=k_0+(\tilde{k}/2)\cdot\{r/(1-2p_0)^2\}$　(30)　但し　$\tilde{k}=(q_0\tau)/L$　(31)　$r=\tau/C$　(33)　$p_0\leqq(1-\sqrt{r})/2$　(33)　である。

b. 平均空間速度　求めるものを $\bar{v}_s$ とすると　$\bar{v}_s=\int_{-\tau}^{C-\tau}\int_{-L}^{0} v_f\{1-k(\theta,\xi)/k_j\}k(\theta,\xi)\,d\xi\,d\theta/\bar{k}LC=q_0\cdot[1+5(1+2p_0)^2 v_f r\tau/\{6(1-p_0)L\}]/\bar{k}$　(34)　となり，[ ] の値を ν とすると　$q_0=\bar{k}\bar{v}_s\cdot(1/\nu)$　(35)

C. 平均所要時間　信号がない場合の区間 L の所要時間を $\beta(=L/v_0)$ とすると，$[-\tau-\beta, \theta_w-\beta]$ に上流端を出発した車の所要時間 $t(\theta)=-(2p_0-1)^2\theta+4p_0(1-p_0)\tau+4p_0L/v_f$　(36)　$[\theta_w-\beta, C-\tau-\beta]$ に出発した車については $t(\theta)=\beta$　(37)　よって　$\bar{t}=\beta+(\tau/2)\cdot\{r/(1-2p_0)^2\}$　(38)　となり，式(30)の関係を考えると　$q_0=\bar{k}\cdot(L/\bar{t})$　(39)　あるいは　$\bar{t}=L\bar{k}/q_0$　(40)　となる。