Ⅳ－5

交通量配分問題のゲーム理論的解釈

信州大学工学部　学生員　○衛門　久明
信州大学工学部　正　員　奥谷　巌

1.はじめに　従来用いられている交通量配分の手法として，時間比配分法，総走行時間最小化配分法，Wardropの等時間原則配分法等が上げられる。特に前二者については合理性に欠けたり，輸送計画的な面が強かったりしており，運転者の経路選択を総括的に取らえているので配分の平衡性が一般的に弱いという一面を持っている。本研究は運転者の経路選択を需要者の経済行動としてとらえ，ゲームの理論を用いることによって，交通量配分をmin-max問題として解こうとするものである。

2.基本的な考え方　min-max定理とは，「相手の出方を考慮して，自分に与えられると予想される非効用の最大値を最小にするように，プレイヤーあるいはプレイヤー群は行動する。」という言葉で示される。これをネットワークへの交通量配分問題に適用する。この場合非効用を所要時間で表わすとすれば，次のような原則に従って配分が進められてゆくと見ることができる。「運転者あるいは運転者群は，予想できる各ルートの所要時間のうち最大の所要時間が最も小さくなるような配分を選ぶ。」

運転者が各々の走行経験の積み重ねによって，走行するネットワークに関して充分な情報を持っているとすれば，Wardropの等時間配分が出現するであろう。しかし，このネットワークを走行する運転者の間に何んらかの提携が結ばれてゆくと仮定すれば，無駄な競合が回避されより大きな効用がもたらされると思われる。この提携が大きくなる程，提携にもたらされる効用は大きくなる（提携の優加法性）。つまり，ネットワークの総交通量をQとすると，Q台の車の提携のもとでルート配分が行なわれることが最も有利となる。従ってこの問題は協力Q人ゲームとして定式化される。しかし，このゲームは効用を時間と考えているので，手付けのないゲームとなる。（一般に配分問題に用いられる効用はほとんど交換不可能なものである。）

以上の考え方をもとに，ネットワークへの配分は次の原則に従うものとする。

1）提携Qは，その提携内の要素が各々のODに関してネットワーク通過に要する時間の最大の値を最も小さくするような配分を行なう。

2）この提携には手付けは存在しないので，各々の車が要した時間がそのまま各々の効用となる。

3.定式化　一般のネットワークではいくつものルートが同じリンクを通過しているので，ひとつのルート交通量の増減が他のルートの所要時間にも何らかの影響を及ぼす。従って各ルートの走行時間関数を表わすと次のようになる，

$$F_i^k(x)=\sum_{e\in E} f_e(y_e)\cdot\delta_{ei}^k \quad \cdots(1)$$

ここに，$F_i^k(x)$；配分xを与えたときの第kODの第iルート所要時間

x；全ODの全ルート交通量を要素としたベクトル，$\sum_{i\in k} x_i^k = Q_k$，$x_i^k \geq 0$，$i=1,\cdots,n_k$，$k=1,\cdots,m$

E；ネットワークを構成するリンクの集合，y_e；リンクeのリンク交通量，$f_e(y_e)$；リンクeの走行時間関数，x_i^k；ODkの第iルート交通量

$$\delta_{ei}^k=\begin{cases}1 & ；\text{OD}k\text{のルート}i\text{がリンク}e\text{を含むとき}\\ 0 & ；\quad〃\quad\text{含まないとき}\end{cases} \qquad \therefore\ y_e=\sum_k\sum_i x_i^k\delta_{ei}^k$$

今，リンク走行時間関数を

$$f_e(y_e)=\alpha_e\cdot y_e+\beta_e \quad \cdots(2) \qquad \alpha_e \geq 0 \;,\; \beta_e \geq 0$$

とすると，$F_i^k(x)$ は次のように表わすことができる。

$$F_i^k(x)=\sum_{e\in E}\left\{\alpha_e\sum_j\sum_l x_j^l\cdot\delta_{ej}^l+\beta_e\right\}\delta_{ei}^k \qquad a_{ij}^l=\sum_{e\in E}\alpha_e\cdot\delta_{ej}^l\cdot\delta_{ei}^k$$

$$=\sum_j\sum_l x_j^l\left\{\sum_{e\in E}\alpha_e\cdot\delta_{ej}^l\cdot\delta_{ei}^k\right\}+\sum_{e\in E}\beta\cdot\delta_{ei}^k=\sum_j\sum_l a_{ij}^l\cdot x_j^l+b_i \quad \cdots(3) \qquad b_i=\sum_{e\in E}\beta_e\cdot\delta_{ei}^k$$

これをマトリックス表示すると，

$$\mathbb{F}(x)=\mathbb{A}\cdot x+\mathbb{B} \;,\; \mathbb{1}_k^T\cdot x=Q_k \quad \cdots(4) \qquad k=1,\cdots,m \qquad \mathbb{1}_k^T=(0,\cdots,0,\underbrace{1,\cdots,1}_{x_i^k\text{に対応}},0,\cdots,0)$$

但し，$\mathbb{A}$ は $[(\sum_k n_k)\times(\sum_k n_k)]$ の対称行列，$\mathbb{F}(x)$, $\mathbb{B}$ は $(\sum_k n_k)$ のベクトルである。従ってこのゲームは，

$$v_{opt}^k=\min_x \max_{i,x_i^k>0} F_i^k(x) \quad \cdots(5) \qquad \text{all of } k$$

となる v_{opt}^k を各々の k について与える配分が最適な配分となる。以下この配分を min-max 配分，v_{opt}^k をOD k についての min-max 値と呼ぶ。

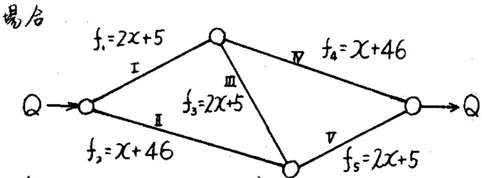
4 計算例

この配分手法では Wardrop の等時間配分と一致する場合もあるが，以下の例に示すように必ずしも等時間配分と一致しない。以下，単一ODについて示す。

1) min-max 値が等時間配分での所要時間より小さくなる場合

図-1のネットワークについて考える。$\mathbb{F}(x)$ は，

$$\mathbb{F}(x)=\mathbb{A}\cdot x+\mathbb{B}=\begin{pmatrix}3&2&0\\2&6&2\\0&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}51\\15\\51\end{pmatrix}$$



ルート1：I → IV
〃 2：I → III → V
〃 3：II → V

x：リンク交通量
f：リンク走行時間

図-1

$Q=30$ とすると，Wardrop の等時間配分は，

$$\bar{x}=\begin{pmatrix}12\\6\\12\end{pmatrix} \;,\; \mathbb{F}(\bar{x})=\begin{pmatrix}99\\99\\99\end{pmatrix}$$

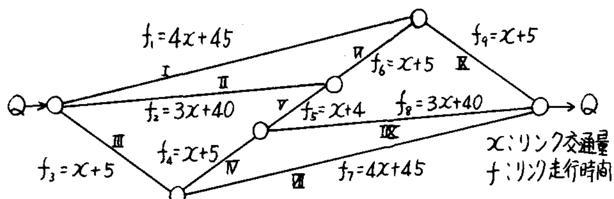
しかし，min-max 配分は次のようになる。

$$x_{opt}=\begin{pmatrix}15\\0\\15\end{pmatrix} \;,\; \mathbb{F}(x_{opt})=\begin{pmatrix}96\\75\\96\end{pmatrix}$$

2) min-max 配分が複数個存在する場合

図-2のネットワークについて，$Q=100$ として，等時間配分は，

$$\bar{x}=\begin{pmatrix}24\\22\\8\\22\\24\end{pmatrix} \;,\; \mathbb{F}(\bar{x})=\begin{pmatrix}200\\200\\200\\200\\200\end{pmatrix}$$



x：リンク交通量
f：リンク走行時間

図-2

ルート1：I → IX
〃 2：II → VI → IX
〃 3：III → IV → V → VI → IX
〃 4：III → IV → VIII
〃 5：III → VII

$$\mathbb{A}=\begin{pmatrix}5&1&1&0&0\\1&5&2&0&0\\1&2&5&2&1\\0&0&2&5&1\\0&0&1&1&5\end{pmatrix} \;,\; \mathbb{B}=\begin{pmatrix}50\\50\\24\\50\\50\end{pmatrix}$$

min-max 配分は，以下の Δx の範囲内で常に成立つ。

$$x_{opt}=\begin{pmatrix}25-\Delta x\\25-3\Delta x\\8\Delta x\\25-3\Delta x\\25-\Delta x\end{pmatrix} \;,\; \mathbb{F}(x_{opt})=\begin{pmatrix}200\\200\\174+26\cdot\Delta x\\200\\200\end{pmatrix} \;,\; 0\leqq\Delta x\leqq 1$$

$\Delta x=1$ のとき Wardrop の等時間配分になる

5 終わりに

例に示したように，この配分法では min-max 値は必らず Wardrop の等時間配分での所要時間以下になる。また例1，2に現われているように，min-max 配分は，流れているルートについては所要時間がすべて等しくなる配分を常に含むと思われるがまだ証明は出来ていない。複数ODのネットワーク配分へのこの手法の応用と計算アルゴリズムの開発と共に今後の課題としたい。

6 参考文献

鈴木光男・中村健二郎「社会システム・ゲーム論的アプローチ」 共立出版