Ⅳ－1

Braessのパラドックスに関する一考察

岐阜大学工学部　正員　宮城俊彦
岐阜大学工学部　正員　加藤晃

1. はじめに

Braessのパラドックス[1]は1968年に発表されたが，この問題が興味ある問題として広く知られるようになったのは1970年のMurchlandの論文[2]によってであろう。Braessの提起した問題は，「もし人の交通行動が等時間原則に従うという仮定を受け入れるならば，新しい道路の建設がある OD間の総通行時間を減少させるのでなく，逆に増加させる場合もありうる」というものである。この問題は実際上の興味とともに交通流の均衡問題，最適交通ネットワーク問題を論ずる場合にも多くの興味ある問題を提起する。たとえば最適ネットワーク問題ではブランチ・アンド・バウンド法がよく用いられるが，この場合の重要な仮定はリンクを付加することによって総通行時間は減少する，あるいはリンクを除去することによって総通行時間が増加するということであり，これが計算の効率性を高める根拠となっている場合が多い。これらの仮定が常に成立するものではないことをBraessの問題は示している。ところで，等時間原則のような個人的合理性に基づくシステムの利用がトータル・システムとしての効率性に劣ることはよく知られており，またゲームの理論の教えるところであるがBraessのパラドックスの本質的な理解もゲーム理論を通して行えよう。しかし，この小論ではこのことに触れずに，単にシステムの特性曲線を用いて説明しよう試みている。そして，パラドックスがボトルネック部を利用せざるえないような形でネットワークが拡張された場合に起こること，そしてそれはOD交通量にも依存していることを示す。

2. Braessのパラドックス

Braessの与えた問題を説明しよう（図-1,2）。本論の例題は，すべてOD交通量 $X=6$ としている。各リンクの交通量，通行時間を各々 x_{ij}, t_{ij} とするときのリンク通行時間関数は図中に示されている。今，①→②→④をルート1，①→③→④をルート2とし，各々の交通量を x_1, x_2，所要時間を t_1, t_2，そして総通行時間をTTとするとき，等時間原則に従う解は，システムⅠに対し，

$$x_1 = x_2 = 3,\quad t_1 = t_2 = 83\text{分},\quad TT = 83 \times 6 = 498\ (\text{分}) \qquad (1)$$

を得る。総通行時間最小化原則（システム最適化配分）による解も(1)に等しい。ところで，システムⅠにリンク(2, 3)を付加した新しいシステム，システムⅡ（図-2）を考えてみよう。このとき，等時間原則による解は

$$x_1 = x_2 = x_3 = 2,\quad t_1 = t_2 = t_3 = 92,\quad TT = 552\ (\text{分}) \qquad (2)$$

となる。ここに，x_3, t_3 はルート3（①→②→③→④）の値である。このように，新しいリンクが付加されることによって，逆にTTが増えている。しかし，この場合でもシステム最適化配分による解は(1)の値を与える。

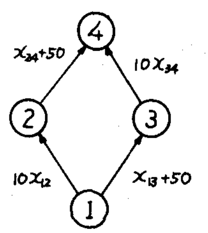

図-1　システムⅠ

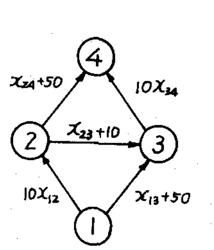

図-2：リンク②→③を新設して得られた新しいシステム

3. システム特性曲線

ネットワークが単純な場合，図によって等時間フローパターンを説明すると都合がよい[3]。たとえば，システムIに対しては図-3を描くことによって説明できる。図中の太線はルート1と2の平均所要時間曲線を合成して得られたもので，これをシステム特性曲線と呼ぶ。同様に，システムIIに対しては図-4を描くことができる。この場合，太い破線はシステムIに単純にルート3の通行時間曲線を加えて得られる特性曲線で，式(3)で与えられる。

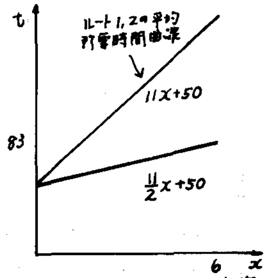

図-3 システムIの特性曲線

$$t = \begin{cases} 21X + 10 & 0 \le X \le 80/31 \\ \frac{231}{53}X + \frac{2210}{53} & \frac{80}{31} < X \le 6 \end{cases} \qquad (3)$$

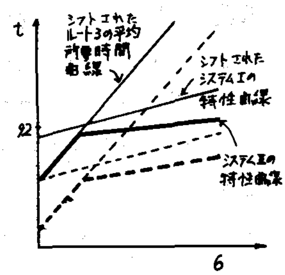

図-4 システムIIの特性曲線

X=6の場合，t=67.9分でシステムIに比べ総所要時間が減少している。これはルート3がルート1および2の一部分と重なりあうことによって発生する混雑費用を無視したためで，実は図-5に示すネットワークに対応している。システムIIに対応した特性曲線は式(4)で与えられ，図-4の太い実線で表わされている。

$$t = \begin{cases} 21X + 50 & 0 \le X \le \frac{40}{31} \\ \frac{231}{53}X + \frac{2490}{53} & \frac{40}{31} < X \le 6 \end{cases} \qquad (4)$$

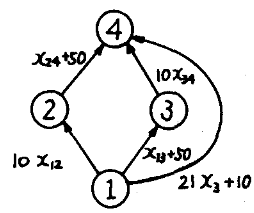

図-5 パラドックスの起こらないシステム

ルート3がルート1とリンク(1,2)で重なり，またルート2とリンク(3,4)で重なる。しかも，両リンクとも他のリンクに比べ容量が非常に小さいため混雑効果が著しく，その為ルート1,2および3の平均所要時間曲線が上方へシフトし，システムの特性曲線がシステムIの上方へシフトする。この例からも明らかなように，パラドックスの起こる条件は，まず第1にリンクの共通利用が行なわれることであり，第2にそのリンクがルートのボトルネック（あるいは，他の構成リンクに比べ単位通行量当りの増加時間が大きいリンク）になっている場合である。ちなみに，システムIIにおいて，新設リンクを(3,2)とした場合にはパラドックスは生じないし，また，図-6に示すネットワーク例でも(2,3)に新設した場合に総通行時間は減少する。このいずれの例も共通利用されるリンクの容量が大きいためにパラドックスは回避されているのである。ところで，図-4より，システムIIの特性曲線の勾配はIのそれよりも小さく，パラドックスが生じないOD交通量が存在することを示している。これを等時間フロー条件式とシステム特性曲線式を用いて求めると，X≒7を得る。このようにパラドックスはOD交通量の大きさにも依存している。

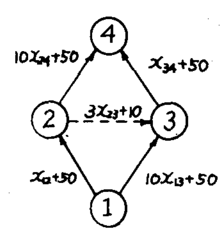

図-6，リンク②→③を新設することにより総所要時間が減少するシステム

最後に，上述の例では，シングルコモディティの場合のみを扱ったが，マルチ・コモディティの場合でも，あるOD間にリンクを新設することによって，他のコモディティ・フローが当該OD間に流れ込み，特性曲線のシフトによってリンク付加以前よりも所要時間が増加することがあることに注意する必要がある。

(1) Braess D.: Über ein Paradoxon der Verkehrsplanung, Unternehmensforshung, 1968
(2) J.D. Murchland: Braess's Paradox of Traffic Flow, Transpn Res. Vol.4 1970
(3) 加藤，宮城：需要-供給均衡法の拡張に関する一考察，昭和50年度中部支部発表会，1975