集合化された作用子による構造力学の基本方程式

名古屋大学　正　川本朓万　正　富樫豊

Ⅰ。序。　近年，長大橋，化学プラント，海洋都市（構造物）にみられるように，構造物は，大型化・複合化・高密化してきている。これに伴ない，構造物の系（以後，単に系）への入力外乱は，因子そのものの多様化，非一様化，ランダム化をきたし（例えば，地震動，熱，海流，位相差形態等），また系の評価（設計の作業）は，大すじでは安全性の追求で一致するものの細部にわたり多様化をきたし，設計レベルにおける系の入力出力の関係を規定する解析の作業が複雑化し，そのために，解析は，大型系を前にして立往生させられてしまう。このような場合，解析は，系と設計に対し，解析の作業における最適さを模索し，近似の方向へと形態を変えるが，この一連の過程においては，解析は，自然界の法則に沿った単純さ及び簡単さの性格を堅持することが，最も望ましい姿である。

著者らは，解析作業をそのように位置づけて，設計状況の判断基準を満足させるべく，設計用入力に対する設計応答の生成と系の解析作業とについて，基礎的研究を行ない，これまでに，場のアナロジー力学及び解析法簡単化理論を創り，これを核として，現象の段階化，順序化，調和波及び直和展開等の問題に対処してきた。本稿では，これに引き続き，構造力学系の問題を扱う。すなわち，化学プラントの耐震問題を，配管系，多部材系から成る構造系の力学問題と想定して，棒材，平面及び曲面板の力学問題を場のアナロジーの力学系により整理し，問題の力学的本質である複雑化・大型化の理論的考察のもとに，系の組合せ・分解に関する理論の構築を試みる。

Ⅱ。集合化作用子による場の構成。　変形体の力学の場においては，場の量は，基準次の量として，変位 u と荷重 g であり，またそれらの増分の量として，歪み ε と応力 σ の増分次の量がある。今，場が，線形弾性でしかも場の量の微小性（微小変位）を有するとすると，場は，次の三つの法則から構成される。

1、変位と歪の関係　〈幾何の世界の法則〉　$\varepsilon = \bar{\nabla} u$　(2,1)

2、力のつりあい式（応力と荷重の関係）〈力の世界の法則〉　$\nabla \sigma = g$　(2,2)

3、構成法則（応力と歪の関係）　〈力の世界と幾何の世界の橋渡し〉　$\sigma = D\varepsilon$　(2,3)

ここに，D は構成係数行列，$\bar{\nabla}$ は歪生成の作用子，∇ は発散作用子である。

場の方程式は，一般に基準次の量で記述され，変形体の力学においては，変位 u と荷重 g との間を規定する。この方程式の誘導は，場の構成の三法則（式(2,1)(2,2)(2,3)）を組合せて，発散作用子が歪生成作用子と転置の関係（ $\nabla = \bar{\nabla}^t$ ）にあることによりなされ，結局，解析表現

$$\bar{\nabla}^t D \bar{\nabla} u = g \qquad (2,4)$$

が得られる。また，基本方程式の誘導を視覚化するため，場の構成の三法則の組合された構造形態を場の解析的構造と称して，図1を与える。基本方程式は，図中の点線で表わされ，それは，作用子 $\bar{\nabla}$，∇，行列 D，によってつくられるものである。

さて，歪生成作用子 $\bar{\nabla}$ は，座標 i 方向の偏微分作用子 ∂_i をいくつか組合せた形態をとるので，ここでは集合化作用子と称され，応力 σ と歪み ε をベクトル配列として，その作用子を行列表現すると

，座標が直交直線系の場合，

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1 & \partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_2 & \partial_1 \end{pmatrix}^t \qquad (2.5)$$

となる。また，曲線座標系に対しては，微分作用子 ∂_i を共変微分に置き換えればよい。ただし，この場合，場の基本方程式を工学系にて表現すると，工学系の応力がテンソル成分でなく，物理成分であるので，テンソル成分と物理成分との対応の変換子が，方程式に組込まれる。

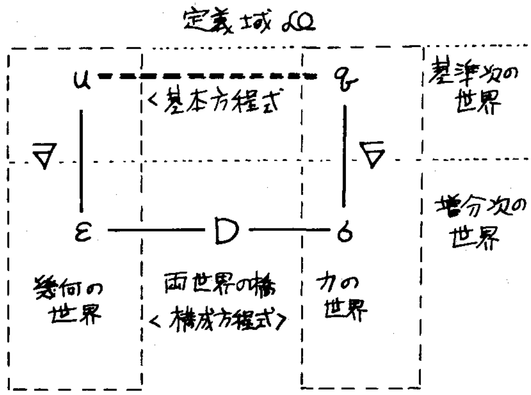

図1　場の解析的構造

3。系の縮退と拡大。　構造力学においては，問題の対処の仕方に二通りの立場がある。一つは，微視的な立場であり，他は，巨視的な立場である。設計は，両立場を必要とし，系の安全性の検討のときには，例えば破壊問題にみられるように微視的なレベルにも立ち入るが，一般には巨視的なレベルで行われる。

力学における微視的と巨視的レベルの構成は，系の解析的構造において，図2のように二つのレベルの間を縮退及び拡大の操作をもって概念化される。一般に系の微視的レベルでの場の解析的表現は困難でないとしても，解析の作業を著るしく困難にさせるので，系は巨視的レベルで記述されることが多い。例えば，棒は，三次元材としてではなく，一次元化された材料として表現される。

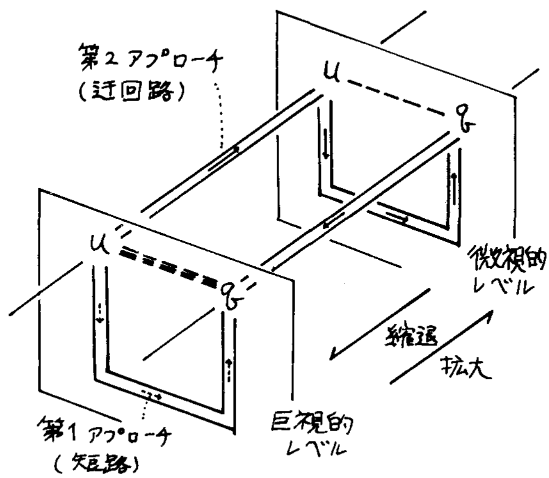

図2　微視・巨視レベルの解析的構造

さて，巨視的レベルでの基本方程式は，図2の点線の位置であるが，これの誘導には，幾何の世界と力の世界との橋をどのレベルでかけるかによって，二つの方法が考えられる。まず一つは，微視的レベルをまったく切りすてて，巨視的レベルにおいて場を構成させる考えで，この場合，両世界をまたぐ橋は，巨視的レベルでかけられる。これに対して第二は，両世界の橋を微視的レベルでかける考えで，巨視的レベルは，この場合，微視的と巨視的の変換操作Hと微視的レベルにおける場の構成（ミクロ（$\nabla^t D \nabla$）の構成）によって表現され，基本方程式は，従って同図中の矢印に沿った方向でつくられることになる。

ところで，微視的・巨視的の変換を系の定義域の縮退とみなすと，これは，いわゆる場の構成の単純化であり，解析的構造において図2とまったく同一となるが，単純化の場合，単純化の程度により，座標及び作用子が活性及び不活性化して，系が構成される。

4。系の結合。　複雑系は，単純な部分系の集合としてみなされるとき，部分系の接合がいかにして解析的に表現されるかを考えてみると，接合の問題は，部材の定義域の大きさによって二つに大別される。一つは，部材の大きさが巨視的レベルであると考えて，実際の構造物でよく問題とされる部

材間接合であり，他の一つは，その大きさが若干微視的レベルにあるとする接合で，例えば，有限要素法における離散化された要素間の接合がある。ここでは，系の接合の概念を明確にするため，有限要素間接合について扱う。有限要素法には，変位法と応力法とがあるが，隣接した要素達を結びつけるものは，変位法の場合には荷重 q であり，応力法では変位 u である。後者の場合，応力 σ を主変数としているので，要素間の応力連続性がある。このように接合域をみると，系を複合化させるには，力の世界においては，荷重による接合，あるいは応力による接合が考えられ，前者を第一接合，後者を第二接合と称して，接合の解析的構造は，図3のように与えられる。

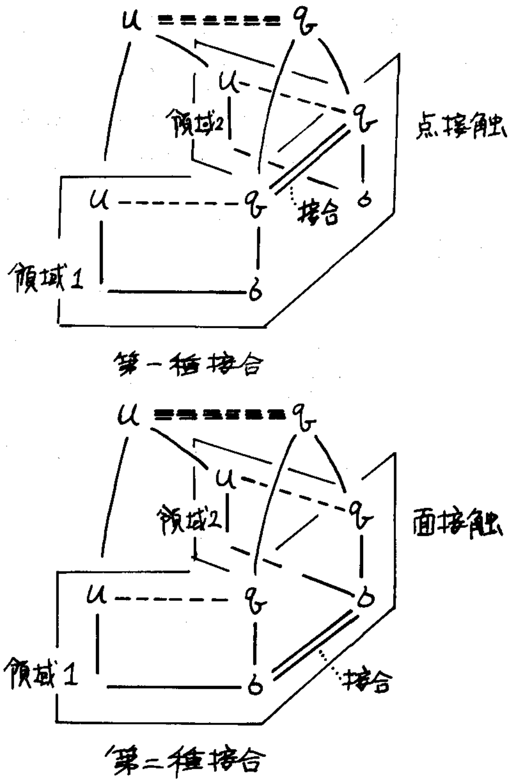

図3．　接合の解析的構造

5。近似（離散化及び単純化）。　場の基本方程式は有限要素法により解かれるが，系に対して，有限要素法離散化がどのように適用されるべきかを考えてみる。一般の系においては，解析を実行する作業過程には，

1、縮退　2，近似　3，接合（結合）

の三つの操作があるので，この操作を，設計に関する評価基準に対し十分な最適さを求めるように組合せて，設計入力出力の応答計算が行われる。すなわち，操作の組合せを変えると，例えば，縮退のあとに離散化を行うか（梁，板のFEM），あるいは逆に離散化のあとに縮退を行うか（FSM，FPM），また接合部材をもからみあわせて，系の把握のもとに，数々の方法により，設計作業が可能となる（図4）。

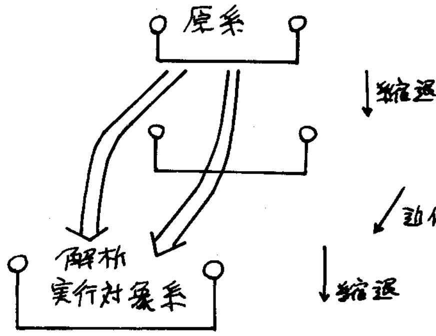

図4．　近似

6。梁と板の解析的構造。　これまでに大型系の解析を微視的・巨視的の縮退，接合，近似の組合せ化として表現したので，ここで，一般の構造物大型系が梁と平面及び曲面の板とから成る部材で構成されていることから，梁と板についての解析的構造を与える。

A。梁。 梁の定義域は本来三次元そのものであるが，梁の長手方向（x_1 方向）を核として，その他の方向（これを断面方向 x_2 x_3）は縮退化されえる。これにあわせて力学現象も，断面方向の力学現象を縮退化した x_1 方向の現象として理想化される。従って，場における主変数は，x_1 方向の座標にのみ関係するとした荷重 q とたわみ w だけとなる。縮退化された定義域を，本来の定義域 dA に対し

て $_{\Delta d\Omega}$ と書くと，場の解析的構造は，図5に示されるように，$\Delta d\Omega$ における場の量の対応関係を与え，また系の構成は，表1で示されるように三つの法則で貫ぬかれている。断面方向の力学現象は，同図中の外枠路の内側であり，これは，外枠路の構成係数EI（ヤング率×断面二次モーメント）として集約される。場の基本方程式は，外枠路のところであり，二重点線に位置する。

三次元から一次元への縮退変換をHとすると，

場の量は

$$_{\Delta d\Omega}u = H_{d\Omega}u = w \quad \text{たわみ} \qquad (6.1)$$

$$_{\Delta d\Omega}q = H_{d\Omega}q = q \quad \text{線荷重} \qquad (6.2)$$

となる．基本方程式は，$d\Omega$ において

$$_{d\Omega}(\nabla^t D \nabla)_{d\Omega}u = {}_{d\Omega}q \qquad (6.3)$$

であるから，H変換後，$\Delta d\Omega$ において

$$_{\Delta d\Omega}(H^t_{\Delta d\Omega}\nabla^t_{d\Omega}D_{d\Omega}\nabla H)_{\Delta d\Omega}u = {}_{\Delta d\Omega}q \qquad (6.4)$$

となる。ここで，

$$_{\Delta d\Omega}\nabla \equiv \mathrm{Degenerate}({}_{d\Omega}\nabla, d\Omega_{x_2x_3}) = \nabla H = \partial_{x^2}\partial_{x_2x_3}^{-1}x_2* \qquad (6.5)$$

$$_{\Delta d\Omega}D \equiv \mathrm{Degenerate}({}_{d\Omega}D, d\Omega_{x_2x_3}) = EI \qquad (6.6)$$

と考えられるから，場の基本方程式は，

$$_{\Delta d\Omega}\partial_{x^2}{}_{\Delta d\Omega}D_{\Delta d\Omega}\partial_x^2{}_{\Delta d\Omega}u = {}_{\Delta d\Omega}q \qquad (6.7)$$

すなわち

$$_{\Delta d\Omega}\nabla = \partial_x^2 \qquad (6.8)$$

として

$$_{\Delta d\Omega}(\nabla^t D \nabla)_{\Delta d\Omega}u = {}_{\Delta d\Omega}q \qquad (6.9)$$

となる。

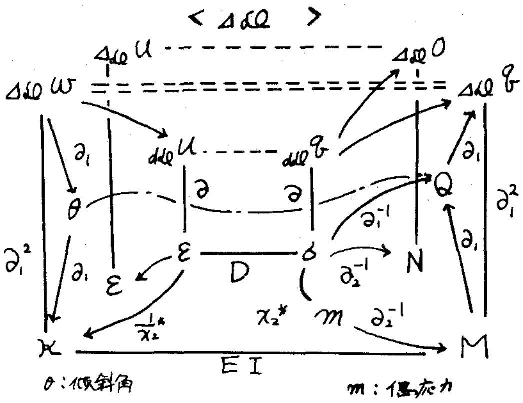

図5　梁の解析的構造

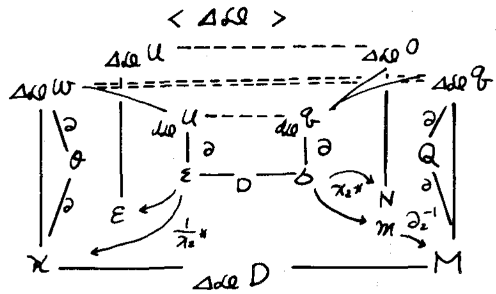

図6　板の解析的構造

表1　梁の場の量と法則

基準状態量	たわみ w	荷重 q
増分状態量	曲率 κ	曲げモーメント M
変換	$\kappa = \partial_x^2 w$	$q = \partial_x^2 M$
構成関係	$M = EI\kappa$	

3．板．

平面板の場の構成は，梁のそれを拡大したものと考えれ，場の量は，たわみ w と（面）荷重 q である。H変換により場の基本方程式は，梁の場合の $_{\Delta d\Omega}\nabla$，$_{\Delta d\Omega}D$ を拡張したもので，式(6.9)と同型となる。また解析的構造は図6の如くである。一方，曲面板の場合は，定義域が三次元空間内の二次元リーマン面であるので，平面板のときの作用子 ∂_i を共変微分に置き換えればよい。

4．結び．

大型化・複合化した構造系を，単純部材の組合せと考えることで，大型系の解析は，縮退，結合，近似の各々の操作の組合せとして，解析的構造のもとで構成されることを明らかにした。今後は，破壊，不安定系等のより一般の理論構築と理論の具体化を試みるつもりである。末筆ながら，多賀助教授，馬場助手，土木第一講座，土圧研究施設の方々に感謝の意を表します。

A．参考文献

[1] 小西横尾，成岡，丹羽 "構造力学 I II III" 丸善 1967
[2] 桜尾 "土圧" 鹿島出版会 1975
[3] ヤンファン（大橋 村上 神谷 訳）"固体の力学/理論" 培風館 1970
[4] 川本 多賀 宮崎　地理工学における解析法の簡単化 1976 土質 P504-512
場の方程式における内挿関数と簡単化理論 1977
波動方程式の直和表現と複合体における波動伝播
崩壊・建設の段階化表現と取岩評価 応力連合 P373-378