有限要素法による熱伝導解析についての一考察

名古屋大学　学生員　○日比野　雅司
名古屋大学　正員　　梶田　建夫

1　はじめに

非定常熱伝導問題を取り扱う場合、空間の要素分割と時間増分の取り方により解の収束性が大きく変化するという問題がある。これに対して、小笠原ら[1]は　1次元熱伝導問題について最適の時間増分を得る式を求めている。ここでは、2次元非定常熱伝導問題を step by step 法（Galerkin法）で解析する際の最適の時間増分を材料定数および空間の離散状態から求めている。

2　熱伝導問題の基礎方程式

非定常熱伝導問題の基礎方程式は　一般に次式であたえられる。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)+Q=\rho C\frac{\partial T}{\partial t} \tag{1}$$

ここで　k_x, k_y, k_z；熱伝導率，ρ；密度，C；比熱，Q；内部発熱量，T；温度，t；時間
(1)式を空間について離散化すると　次式が得られる。

$$[K]\{T\}+[C]\{\dot{T}\}+\{F\}=0 \tag{2}$$

時間変数を1次の補間関数（式(3)）で表わし、Galerkin法[2]で(2)式を時間について離散化すると(4)式が得られる。

$$T=N_tT_t+N_{t+\Delta t}T_{t+\Delta t}\quad[\,N_t=1-t/\Delta t,\ N_{t+\Delta t}=t/\Delta t\quad(0<t<1)\,] \tag{3}$$

$$T_{t+\Delta t}=\left([C]/\Delta t+2[K]/3\right)^{-1}\left\{\left([C]/\Delta t-[K]/3\right)T_t-2\int_0^{\Delta t}\{F\}t\,dt/(\Delta t)^2\right\} \tag{4}$$

3　2次元問題における最適時間増分の求め方

材料定数および空間の離散状態から最適時間増分を求めるために　厳密解と有限要素解の比較を行なってみる。内部発熱のない2次元非定常熱伝導方程式は　次式であたえられる。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\rho C\frac{\partial T}{\partial t}\quad(0<x<L_x,\ 0<y<L_y,\ 0<t) \tag{5}$$

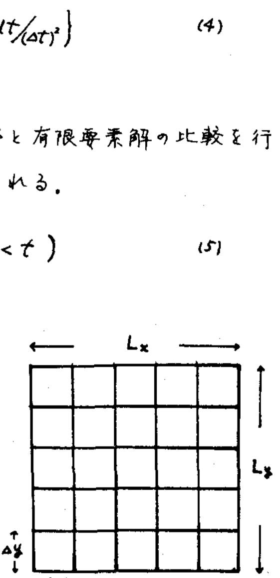
境界条件　$T(0,y,t)=T(x,0,t)=T(L_x,y,t)=T(x,L_y,t)=0$　(6)

初期条件　$T(x,y,0)=T_0$　(7)

をあたえると　厳密解はつぎのようになる。

$$T(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{L_x}\sin\frac{j\pi y}{L_y}\cdot\exp\left[-\left(\frac{k_xn^2\pi^2}{L_x^2}+\frac{k_yj^2\pi^2}{L_y}\right)\frac{t}{\rho C}\right] \tag{8}$$

$$A_n=\frac{4\cdot T_0}{n\cdot j\cdot\pi^2}\left[(-1)^n-1\right]\left[(-1)^j-1\right]$$



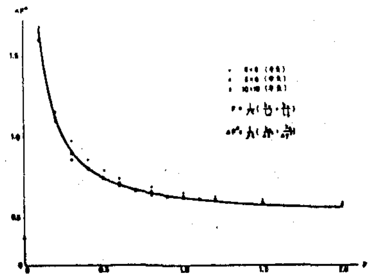
図(1)　四角形要素

有限要素解を求めるために空間を図(1)のように　四角形要素で分割する。ここでは、時間増分と材料定数および空間の離散化の程度との関係を表わすためにつぎのパラメータを用いる。

$$F = \left(\frac{k_x}{L_x^2} + \frac{k_y}{L_y^2} \right) \frac{t}{\rho C} \qquad (9) \qquad \Delta F = \left(\frac{k_x}{\Delta x^2} + \frac{k_y}{\Delta y^2} \right) \frac{\Delta t}{\rho C} \qquad (10)$$

また、厳密解と有限要素解を比較するために(11)式のようなパラメータを用いる。

$$\phi = \frac{\int_0^{L_x}\int_0^{L_y} T \quad dx\,dy}{\int_0^{L_x}\int_0^{L_y} T_{exact} \quad dx\,dy} \qquad (11)$$



図(2)　FとΔF^*の関係

あるFの値でΔtを変化させ、その時のϕの値を求めてみる。すなわち、$\phi \fallingdotseq 1.0$となったときのΔtが最適となり、その時のΔFの値をΔF^*とする。そしてFの値を変化させ、その時のΔF^*を求めると任意のFでの最適時間増分が求まる。いま、(10×10)要素分割した時のFとΔF^*の関係を図(2)に示す。図よりFとΔF^*は(12)式の関係にあると考えられる。

$$\Delta F^* = 0.12/F + 0.5 \qquad (12)$$

また、(6×6)、(8×8)要素分割の場合も、ほぼその関係にある。よって、求める最適時間増分は、次式であたえられる。

$$\Delta t = \frac{\rho C}{(k_x/\Delta x^2 + k_y/\Delta y^2)} \left\{ 0.12/F + 0.5 \right\} \qquad (13)$$

3　解析例

(13)式を用い、つぎの条件下での厳密解(表-1)と有限要素解(表-2)を求めてみる。$k_x = k_y = 0.117\ (cal/sec \cdot cm \cdot {}^\circ C)$ $c = 0.111\ (cal/g \cdot {}^\circ C)$、$\rho = 7.85\ (g/cm^3)$、$L_x = L_y = 10\ (cm)$　$T_0 = 30\ ({}^\circ C)$ $\Delta x = \Delta y = 1\ (cm)$、$t = 120\ (sec)$、$\Delta t = 3\ (sec)$

なお、解は中心点に対して対称となるので、対称部分を省く。また、実在の構造物の解析例[3]として、合成箱桁の温度分布の様子を図(3)に示す。

表-1　厳密解

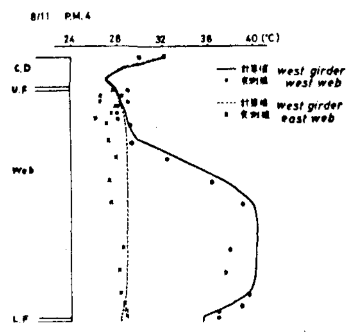
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.193	0.367	0.505	0.594	0.625
0.0	0.367	0.698	0.961	1.130	1.188
0.0	0.505	0.961	1.323	1.555	1.635
0.0	0.594	1.130	1.555	1.829	1.923
0.0	0.625	1.188	1.635	1.923	2.022

表-2　有限要素解($\Delta t = 3\ sec$)

0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.193	0.366	0.504	0.593	0.623
0.0	0.367	0.697	0.959	1.128	1.186
0.0	0.504	0.959	1.320	1.552	1.632
0.0	0.593	1.128	1.552	1.824	1.918
0.0	0.623	1.186	1.632	1.918	2.017

4　まとめ

非定常熱伝導問題の解析において、時間増分は細かいほどその精度が高まると思われているが、実際は過度に細分化するとかえって精度が悪くなるという現象がみられる。今後、他の条件の場合についても計算を行ない、より一般的な時間増分を求める方法を示したいと思う。



図(3)　合成箱桁の温度分布

参考文献

1)　小笠原、武田、斉藤「熱方程式解析のための有限要素モデルと時間増分について」第32回年次学術講演会講演概要集 才1部

2)　Zienkiewicz, O.C.「マトリックス有限要素法」　培風館　1976

3)　堀口「鋼箱桁の温度挙動に関する基礎的研究」名大土木研究報告書 77116