

信州大学工学部 正 員 草間 孝志

信州大学工学部 正 員 三井 康司

信州大学工学部 学生員 〇岩本 久信

① まえがき

線形粘弾性問題の数値解法の一つに、弾性-粘弾性の対応原理を用いる方法がある。この方法は与えられた問題をラプラス変換により、弾性問題に置換して像空間における解を求め、数値ラプラス逆変換をほどこすことにより、原空間における解を得るという方法である。この方法の利点は時間方向に差分法を用いて逐次解を追跡していく方法に較べて累積誤差がなく、また広範囲な時間領域にあたって解を求める場合にも計算時間が少なくすむ等の利点を有するが、その反面、数値ラプラス逆変換に際して、解の精度を検証する方法がないという欠点がある。本報告は、主として数値ラプラス逆変換にあたって、ラプラス変数の妥当な数値のとり方について述べてものである。

② 仮定関数とスペクトル

粘弾性体

の準静的問題の解(変位, ひずみ, 応力)は一般に(1)の形で与えられ, $f(t)$ の仮定関数としては, (2-a) または (2-b) が用いられる。ここに C_1, C_2, A_i, α_i は定数である。(2-a), (2-b) は特性緩和時間 τ は特性遅延時間に線スペクトルをもつ緩和関数またはクリープ関数と同形であるから, α の分布を連続的に考えると, τ とは (2-a) に対しては (3) が成立する。 $H(\alpha)$ は材料の応力ひずみ関係の場合, α を緩和時間で置きかえると緩和スペクトルと呼ばれるものであるが, ここでは材料特性のみならず, 構造物の寸法, 境界条件, 荷重状態に支配され, 与えられた問題に対する固有なスペクトルである。一す, (1) のラプラス変換に s を乗ずると (4) を得る。また, C_1, C_2 は (5) の関係で与えられ, さらに, $s\bar{y}(s)$ は s に数値を与えることによって対応原理よりラプラス像空間での解として求めることができるゆえ¹⁾, $s \sim s\bar{y}(s)$ 関係が数値的に得られる。 $H(\alpha)$ は図-1 に示すように基本的には $s\bar{f}(s)$ のスチルチエス変換となるゆえ,

$$y(t) = C_1 + C_2 t + f(t) \quad (1)$$

$$f(t) = \sum_i A_i \cdot \exp(-t/\alpha_i) \quad (2-a)$$

$$f(t) = \sum_i A_i \{1 - \exp(-t/\alpha_i)\} \quad (2-b)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^\infty F(\alpha) e^{-t/\alpha} d\alpha \\ &= \int_0^\infty H(\alpha) e^{-t/\alpha} d(\ln \alpha) \end{aligned} \quad (3)$$

$$s\bar{f}(s) = s\bar{y}(s) - (C_1 + C_2/s) \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \lim_{s \rightarrow \infty} s\bar{y}(s) \\ C_2 &= \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \bar{y}(s) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$s\bar{f}(s) \xrightarrow{\text{ラプラス逆変換}} f(t) \xrightarrow{\text{ラプラス変換}} H(\alpha)$$

スチルチエス変換

図-1

$$H(\alpha) = \left| \left[\frac{d\{s\bar{f}(s)\}}{d(\ln s)} \right]_{s=\frac{1}{\alpha}} \right| \quad (6)$$

$$H(\alpha) = \frac{1}{2} \left| \left[-\frac{d\{s\bar{f}(s)\}}{d(\ln s)} + \frac{d^3\{s\bar{f}(s)\}}{d(\ln s)^3} \right]_{s=\frac{1}{\alpha}} \right| \quad (7-a)$$

$$\begin{aligned} H(\alpha) &= \frac{1}{6} \left| \left[4 \frac{d\{s\bar{f}(s)\}}{d(\ln s)} - 5 \frac{d^3\{s\bar{f}(s)\}}{d(\ln s)^3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{d^5\{s\bar{f}(s)\}}{d(\ln s)^5} \right]_{s=\frac{1}{\alpha}} \right| \quad (7-b) \end{aligned}$$

τ とは, $s\bar{f}(s) \rightarrow f(t)$ 変換に ter Haar の近似式を, $f(t) \rightarrow H(\alpha)$ 変換に Widder の逆変換公式より得られる Schwarzl のオ-近似式を用いると (6) を得る。また, 直接スチルチエス変換公

式を適用して $H(\alpha)$ を求めると、 σ_0 、 σ_0 二近似式として (7-a)、(7-b) を得る。

③ ラプラス数値逆変換における S のとり方 数値逆変換における S のとり方は、従来各自適宜に選択している。たとえば、 $\text{Cost}^{2)}$ は Papoulis の提案した方法、すなわち、偶関数のルジャンドル多項式 $y(t) = f(t) = \sum_{l=0}^n C_l \cdot P_{2l}(e^{-\gamma_0 t}) = A_0 + \sum_{l=1}^n A_l e^{-2L\gamma_0 t}$ を仮定したときの未定係数は、 $S_l = (2L+1)\gamma_0$ 、($L=0, 1, 2, \dots$) とおくことにより得られるが、 γ_0 の値は $-2.0 \leq \log \gamma_0 \leq 0$ を満足するような各時間帯で変えるべきだと述べており、丹羽、小林、中島³⁾ は熱伝導問題の過渡応答解析にラプラス逆変換を利用し、 $S = 0.01, 0.02, 0.04, \dots, 5242.88$ の計 20 個の S をとって逆変換を行なっている。また、Young, Liggett⁴⁾ は湖流 (Lake Circulation) の計算に $S = 2 \times 10^5, 2 \times 10^4, \dots, 2 \times 10^2$ の計 8 個の S をとって逆変換を行なっている。このように逆変換に際しての S のとり方については、大まかな目安さえもないといえよう。一方、赤木⁵⁾ は遅延スペクトルが卓越する英での遅延時間を求めて粘弾性定数を決定する方法を示している。この方法はクリープ関数は指数関数を仮定する場合には合理的な方法である。したがって、本文の場合には $S \bar{f}(S)$ から $H(\alpha)$ の卓越する α を見出し、(2) の $f(\alpha)$

が、その指定した α に関する指数関数になるような S_L を用いてラプラス逆変換をほどこせば $f(t)$ の精度はよくなるものと考えられる。

④ 計算例

④-1 計算例 図-2 は山田著：塑性・粘弾性 (p.161) の問題をルジャンドル多項式を用いて解いた例で、(6) を用いて E_x の $H(\alpha) \sim (1/\alpha)$ を図示したものであり、 $H(\alpha)$ が卓越する英を重視し、 $\gamma_0 = 0.1$ 、 $S = (2L+1)\gamma_0$ について逆変換を行なえば図中に表示するように解の精度はよい。図-3 は Lee⁶⁾ が取り扱った問題で、(6)、(7) を用いて σ_0/ρ の $H(\alpha) \sim (1/\alpha)$ を図示したものである。この場合にも、偶然 $\gamma_0 = 0.1$ となった。図-4 は図-3 の問題について、 γ/b を変えたときの $H(\alpha) \sim (1/\alpha)$ を示す。この場合にも、偶然 $\gamma_0 = 0.1$ となった。図-4 は図-3 の問題について、 γ/b を変えたときの $H(\alpha) \sim (1/\alpha)$ を示す。この場合にも、偶然 $\gamma_0 = 0.1$ となった。図-4 は図-3 の問題について、 γ/b を変えたときの $H(\alpha) \sim (1/\alpha)$ を示す。この場合にも、偶然 $\gamma_0 = 0.1$ となった。

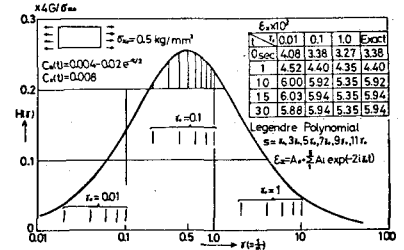


図-2

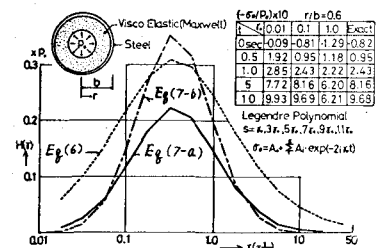


図-3

⑤ 結言 以上、主としてラプラス逆変換に際しての S のとり方について論じたが、スペクトルが箱型分布をする場合、まにはピークが数英で生ずる場合などを想定して任意な α に対する直交指数関数を求めたが、これについては当日発表の予定である。

文献 1) 草間、三井、入口：32 回土木年次講演 I 47，2) Cost：AIAA-J. Vol. 2, No. 12, 1964，3) 丹羽、小林、中島：31 回土木年次講演 I-303，4) Young, Liggett：ASCE, Vol. 99, No. HY2, Feb. 1977, pp 109~121，5) 赤木：土と基礎 25-3, 1977，6) Lee：Trans. Soc. Rheol. III, 1959, pp 41~59

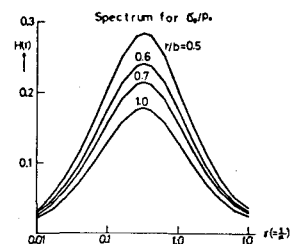


図-4