新しい有限モデルによる粘弾性ばりの振動解析

岐阜大学大学院　学生員　○　松本　寛一
岐阜大学工業短期大学部　正員　井上　肇

土木構造物において振動解析を行なうにあたり，土質材料，コンクリート材料等から成るものの，動的変形を規定する性質は，振動の減衰といった現象及び，その材料の力学的性質を考えてみると，粘弾性体として取扱った方が良い。　また工学及び，自然科学の多くの分野で用いられている有限要素法による粘弾性体の振動解析は，すでに確立されていると考えられるが，線形でもかなり大きな計算量を必要とし，非線形に至っては莫大な計算を必要とするため，現段階では経済性と伝った面を無視せざるを得ない状況にある。　したがってこのような欠点を補ない，かつ精度的にも満足でき新しい解法が，必要とされている。

ここで，剛体バネモデル（梁の場合には，それをいくつかの任意の長さに分割し，その要素自身は剛体として考え，要素の粘弾性的な性質は，要素の両端に考えた非線形バネを介して，他の要素と連結され　これらのバネの変形によって梁の変形や応力の伝達が行なわれると考えるもの。）は，釣合方程式がタワミだけで求められるため，梁の場合には未知量が有限要素法の半分ですみ，前述の経済性をある程度向上させることができると考えられる。　以上の事柄より本研究においては，数学モデルとしては　剛体バネモデルを，その物性モデルとしては，粘弾性を採用する。　また，構造物としては　すでに渡辺氏により有限要素法によって解析されている片持梁を，剛体バネモデルで解析し，有限要素法と精度，計算時間の二点において比較検討してみる。

剛体バネモデル（図1）における粘弾性回転バネは，
Maxwell－Kelvin体（図2）を採用する。

回転バネは，次のように考える

$$\Delta\theta_i = \theta_{i+1} - \theta_i = (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})\cdot\lambda^{-2}$$

$$M_i = k\cdot\Delta\theta_i = k^{*}\cdot D^{-1}(t)\,(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$$

ここにて　$d\theta/dx = 1/R$　より（R：曲率半径）

$$k = EI\cdot\lambda^{-1} = EI\cdot\lambda^{-1}\cdot D^{-1}(t) = k^{*}\cdot D^{-1}(t)\cdot\lambda^{2}$$

但し　$D^{-1}(t) = 1 - \gamma/(p+\alpha) - \delta/(p+\beta)$

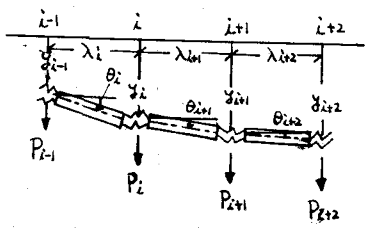

図1

$D^{-1}(t)$ は，Maxwell－Kelvin体に伴う履歴効果を与える積分演算子で，α～δは次のとおりである。

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right. = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{E+E_1}{\eta_1}+\frac{E}{\eta}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{E+E_1}{\eta_1}+\frac{E}{\eta}\right)^2 - \frac{4EE_1}{\eta\eta_1}}\right\}$$

$$\gamma = \frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\left(\frac{E}{\eta}+\frac{E}{\eta_1}\right)\alpha - \frac{EE_1}{\eta\eta_1}\right\}$$

$$\delta = \frac{1}{\alpha-\beta}\left\{\frac{EE_1}{\eta\eta_1} - \left(\frac{E}{\eta}+\frac{E}{\eta_1}\right)\beta\right\}$$

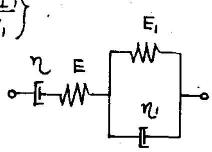

図2　Maxwell-kelvin body

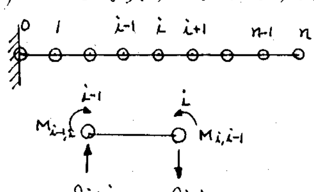

図3

（図3）のような剛体要素におけるその両端（$i-1$ 及び i 点）におけるせん断力（$Q_{i-1,i}$ 及び $Q_{i,i-1}$）の関係を用いると，

$$Q_{i,i-1} = [-k^*_{i-1} D^{-1}_{i-1}(t),\ k^* D^{-1}_{i}(t)] \begin{bmatrix} y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i \\ y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} \end{bmatrix}$$

$$Q_{i,i+1} = [-k^*_{i} D^{-1}_{i}(t),\ k^* D^{-1}_{i+1}(t)] \begin{bmatrix} y_{i-1} - 2y_{i} + y_{i+1} \\ y_{i} - 2y_{i+1} + y_{i+2} \end{bmatrix}$$

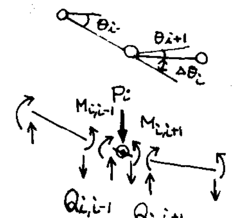

図4

節点iに関するStiffness Matrixは、次のように考えることができる。
節点における力の釣合いを、考えると（図4.参）

$$P_i = Q_{i,i-1} - Q_{i,i+1} = \frac{M_{i,i-1} - M_{i-1,i}}{\lambda} - \frac{M_{i+1,i} - M_{i,i+1}}{\lambda} \quad \text{------------(1)}$$

この節点iの節点変位ベクトルをZ_iとし、節点反力ベクトルをM_i,係数マトリックスBを$B=[1,-2,1]$とすると、次式のような関係式が成立する。 ただし $Z_i = [y_{i+1}, y_i, y_{i-1}]^T$

$$M_i = k^*_i D^{-1}(t)\cdot B\cdot Z_i = k^*_i D^{-1}(t)\cdot Z_i$$

これを、(1)式に代入して整理すると、

$$P_i = B\cdot D^{-1}(t) \begin{bmatrix} k^*_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & k^*_i & 0 \\ 0 & 0 & k_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BZ_{i-1} \\ BZ_i \\ BZ_{i+1} \end{bmatrix} \quad \text{----------------(2)}$$

Z_iについて次に示めすような近似的逐次積分を、行なう。

$$D^{-1}(t)\cdot Z_i = Z_i^{(n)} - \gamma \bar{Z}_i^{(n)} - \delta \bar{\bar{Z}}_i^{(n)}$$

ただし $\bar{Z}^{(n)} \simeq \Omega_1 Z_i^{(n)} + e^{-\alpha\Delta t}\bar{Z}_i^{(n-1)}$

$\bar{\bar{Z}}^{(n)} \simeq \Omega_2 Z_i^{(n)} + e^{-\beta\Delta t}\bar{\bar{Z}}_i^{(n-1)}$

ここにて、$\begin{cases} \Omega_1 = (1-e^{-\alpha\Delta t})/\alpha \\ \Omega_2 = (1-e^{-\beta\Delta t})/\beta \end{cases}$

$$h_i^{(n)} = \gamma\cdot k^*_i B\bar{Z}_i^{(n)} + \delta\cdot k^*_i B\bar{\bar{Z}}_i^{(n)}$$

以上を、(2)式に代入してやると、

$$P_i^{(n)} = B \begin{bmatrix} k^*_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & k^*_i & 0 \\ 0 & 0 & k_{i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} BZ_{i-1}^{(n)} \\ BZ_i^{(n)} \\ BZ_{i+1}^{(n)} \end{bmatrix} + \mathbb{h}_i^{(n)} \qquad \text{ただし}\ \mathbb{h}_i^{(n)} = B\begin{bmatrix} h_{i-1} \\ h_i \\ h_{i+1} \end{bmatrix}$$

$[M]$は、Lumped Mass Matrix、R^*は、節点外力ベクトルとする。 iが、1〜Nまで変化する時、$Z_{i-1}^{(n)}, Z_i^{(n)}, Z_{i+1}^{(n)}$に含まれるタワミのベクトルを、$y$とし その係数を合成したStiffness Matrixを$[K^*]$，力の緩和項を$\mathbb{H} = [h_1, h_2, \cdots, h_N]^T$とおくと、振動方程式は、次式のようになる。

$$[M]\ddot{y}^{(n)} + [K^*]y^{(n)} = \mathbb{H}^{(n)} + R^*$$

上式中から主振動方程式を抜き出し、これを$\ddot{y}_1$とし 時間に関するexplicitな中央差分で、近似すると、

$$y_1^{(n+1)} = 2y_1^{(n)} - y_1^{(n-1)} + \Delta t^2 [M]^{-1}_{11}\{-[K^*]_{11} y_1^{(n)} - [K^*]_{12} y_2^{(n)} + \mathbb{H}_1^{(n)}\}$$

ここにて $[K^*]_{12}$は、支点以外の点で、支点による攪乱の影響を受ける。また$[M]_{11}$, $[K]_{11}$, $\mathbb{H}$は、影響を受けない点のMatrix及びVectorである。 なお計算結果は、発表の際に譲る。