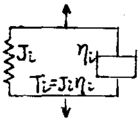
動的粘弾性定数の一決定法

豊田工業高等専門学校（正） 赤木知之

1．まえがき

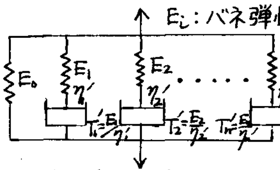
構造物の動的挙動を解析的に取扱う場合，我々はまず構造材料の動的特性を何らかの形で明らかにしなければならない。通常の振動論においては，部材は弾性体として扱い，構造系における振動エネルギーの損失を系の運動速度に比例する減衰力として評価する方法がとられる。本報告では，部材を粘弾性体として扱う方法を考える。粘弾性体の動的特性は複素弾性率によって評価することができる。粘弾性体を線形のレオロジーモデルで表わすと，その複素弾性率はモデル定数によって明快に書き表わされる。このような場合，復元力と減衰力を単純に重ね合わせる従来の方法は，材料をVoigtモデル（図1）で表わすことに相当する。しかし，Voigtモデルでは材料の粘弾性特性を明快に説明できないことを，筆者はもとより多くの研究者が準静的問題において，さらに動的問題においても指摘している[1),2)]。ここでは，一般的な特性を備えたモデル（図2）を考える。従来から様々なモデルが提案され利用されているが，図2のモデルは，それらすべてのモデルを包含するきわめて一般的なモデルである[1)]。特定の単純なモデルでは，その適用範囲が狭い周波数領域に限定されてしまうが，図2のモデルは実際の材料挙動に応じて任意の特性を評価することができる。モデルの複素弾性率を示すとともに，はりの定常曲げ振動の解から複素弾性率が求められることを述べ，得られた複素弾性率の周波数分散からモデル定数の決定を行う。



J_i：バネコンプライアンス
η_i：ダッシュポットの粘性係数
T_i：遅延時間

図1 Voigtモデル

E_i：バネ弾性率



$T_1', T_2', \cdots, T_n'$：緩和時間

図2 一般化Maxwellモデル

2．複素弾性率と動的粘弾性定数

モデルに対応する応力－ひずみ関係は，線形微分方程式として与えられるから，いま，正弦的な入力としてのひずみを $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{j\omega t}$ と与えると，応答としての応力もやはり正弦的となる。入力と応答の比をとって複素弾性率がつぎのように得られる。

$$E^*(j\omega) = E' + jE'' \tag{1}$$

ここに，E'は動的弾性率，E''は動的損失と呼ばれ，それぞれの内容は表－1のように表わされる．したがって，モデル定数である E_0，E_i，T_i'（$i=1,2,\cdots,n$），および，その数nが決定されれば，その材料の動的粘弾性特性が明らかにされたことになる。本報告では，これらを動的粘弾性定数と呼ぶ。ωは円振動数である。

表－1

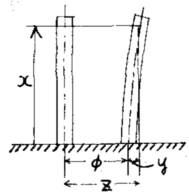
モデル	微分方程式	動的弾性率（E'）	動的損失（E''）
Voigt	$\sigma = \frac{1}{J_i}\varepsilon + \eta_i\dot{\varepsilon}$	$\frac{1}{J_i}$	$\omega\frac{T_i}{J_i}$ ，$T_i = J_i\eta_i$
一般化 Maxwell	$\sigma = E_0\varepsilon + \sum_{i=1}^{n}\sigma_i$ $\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E_i}\dot{\sigma}_i + \frac{1}{\eta_i'}\sigma_i$	$E_0 + \sum_{i=1}^{n} E_i\frac{(\omega T_i')^2}{1+(\omega T_i')^2}$	$\sum_{i=1}^{n} E_i\frac{\omega T_i'}{1+(\omega T_i')^2}$ ，$T_i' = \frac{\eta_i'}{E_i}$

3．はりの定常曲げ振動

図3に示すような，断面積A，断面2次モーメントI，長さℓ，単位体積重量ρなる片持ばりの固定端に，強制変位 $\phi = \phi_0 e^{j\omega t}$ を与えた場合，はりの自由端での加速度応答の倍率および位相差を測定して，その値か

らE′およびE″を求めることを考える。はりの変形をy，はりの変位をZとすれば，次式が成立する。

$$Z = y + \phi \tag{2}$$



図－3

微小線形振動を仮定し，Bernolli－Eulerの仮定を導入すると，はりの曲げ振動に関する運動方程式は，複素弾性率を用いてつぎのように与えられる。

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E^*(j\omega)\cdot C\cdot\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\quad,\quad C=\frac{Ig}{\rho A} \tag{3}$$

式(3)の解として，$y = Y(x)\cdot e^{j\omega t}$を仮定する。さらに，変形$Y(x)$が基準関数$Y_s(x)$によって展開できるものとする。基準関数は，減衰が無い場合すなわち弾性体に対する振動方程式の解としてつぎのように与えられる。

$$Y_s(x) = \frac{\sin q_s l - \sinh q_s l}{\cos q_s l - \cosh q_s l}(\sin q_s x - \sinh q_s x) + (\cos q_s x - \cosh q_s x)\ ,\ s=1,2,\cdots\cdots \tag{4}$$

ただし，q_sは振動数方程式　$1+\cos q_s l\cdot\cosh q_s l = 0$　を満足し，振動系の固有値である。若干の手順を経て解がつぎのように求められる。

$$y = \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\phi_0\,\omega^2}{E^*(j\omega)C q_s^4 - \omega^2}\,\beta_s Y_s(x)\cdot e^{j\omega t}\quad,\quad \beta_s = \frac{\int_0^l Y_s(x)dx}{\int_0^l Y_s^2(x)dx} \tag{5}$$

式(5)を式(2)に用いてその実部をとれば，はりの自由端での変位応答$Z(l,t)$を求めることができる。加速度応答は，$\ddot{Z}(l,t)$として得られる。入力加速度に対する応答加速度の倍率L_s，および，その位相差φ_sを，s＝1すなわち1次モードの場合についてホすとつぎのとうりである。

$$L_1 = \sqrt{\frac{(Cq_1^4)^2(E'^2+E''^2) - 2(1-\beta_1 Y_1(l))Cq_1^4 E'\omega^2 + (1-\beta_1 Y_1(l))^2\omega^4}{(Cq_1^4)^2(E'^2+E''^2) - 2Cq_1^4E'\omega^2 + \omega^4}} \tag{6}$$

$$\tan\varphi_1 = \frac{Cq_1^4 E''\beta_1 Y_1(l)\omega^2}{(Cq_1^4)^2(E'^2+E''^2) - (2-\beta_1Y_1(l))Cq_1^4E'\omega^2 + (1-\beta_1Y_1(l))\omega^4} \tag{7}$$

式(6)および式(7)を連立させて，E′およびE″について解くと，その結果はつぎのように書き表わされる。

$$E'' = \frac{2\tan\varphi_1\cdot L_1\omega^2\left[L_1(1+\beta_1Y_1) \pm \sqrt{L_1^2(1+\beta_1Y_1)^2 + (\beta_1Y_1/2)^2\{(L_1^2-1)+(L_1^2+1)^2\tan^2\varphi_1\}}\right]}{Cq_1^4\{(L_1^2-1)^2+(L_1^2+1)^2\tan^2\varphi_1\}} \tag{8}$$

$$E' = \frac{(L_1^2-1)}{(L_1^2+1)\tan\varphi_1}E'' + \frac{(L_1^2+1-\beta_1Y_1)\omega^2}{Cq_1^4(L_1^2+1)} \tag{9}$$

なお，式(8)において，E″は正値でなければならないから式内の符号は$\tan\varphi_1$の符号，すなわち，位相差が$\frac{\pi}{2}$より大きいか小さいかによって選択される。

結局，振動試験によって応答倍率L_1，および，その位相差φ_1を測定すれば，式(8)，(9)によって複素弾性率の実部および虚部が求められる。種々のω（円振動数）に対するそれらの値を求めて図示すると，その材料に対する力学的分散曲線が得られる。動的損失(E″)の分散曲線では，緩和時間(T_i')の逆数に等しい円振動数のところでピークを示すので，実験的に得られるその曲線からT_i'およびその数nが決定できる。E_0，E_i（i＝1,2,…n）は，その結果を動的弾性率(E′)の実験結果に適用して求められる。若干の適用例を当日紹介する。

参考文献

1）　赤木知之：レオロジーモデルの取扱い方法に関する若干の考察，土木学会論文報告集，No. 257，1977年1月，pp. 127～130

2）　畑野　正：粘弾性体の振動，土木学会論文報告集，No. 110，1964年10月，pp. 10～20

3）　赤木知之：レオロジーモデル定数の一決定法，土と基礎，Vol. 25，1977年3月，pp. 47～52