

復元力, 減衰力がともに非線形な1自由度系の等価線形化

金沢大学工学部 正員 北浦 勝

1. はじめに

従来から構造物の応答変位と復元力の関係については, 履歴を含む非線形領域や崩壊に至るまでの詳細な実験結果が報告されている。一方地震応答解析の実施に当って, このように復元力特性が履歴を有する場合の応答の確率統計的評価は, 線形復元力に対して成り立つ Duhamel 積分を使えないことから, ほう大なシミュレーションを実施しなければならない。そこで履歴復元力を近似的に等価な線形系に置換することにより理論的考察を容易ならしめる努力が続けられ, 一定の成果が挙げられつつある^{1), 2)}。ところで非線形な関係にあるのは変位と復元力の関係ばかりではなく, 応答速度と減衰力の関係も非線形になる場合のあることが指摘されている³⁾。このように復元力特性, 減衰力特性がともに非線形である場合にはますます理論的取り扱いが困難となることから, 等価線形化手法を導入することが是非とも必要とされる。このような観点から本研究では, 減衰力の非線形性に関するデータがあまり見当たらないことから, 最初に著者が実験によって求めた非線形減衰力を例として説明し, しかるのち小堀・南井博士によって用いられている方法¹⁾に準じて復元力と減衰力がともに非線形な系の等価線形化手法について述べる。

2. 減衰力が非線形な振動系の例

構造物基礎—地盤系における地盤反力を求めるために, 実地盤中に基礎模型を根入れさせ, 起振機実験を実施した。応答変位と応答速度の関数である全地盤反力を応答変位に依存する復元力項と応答速度に依存する減衰力項とに分離したところ, 以下のような結果を得た。

- (1) 復元力項は履歴を有する非線形となる。履歴減衰として評価される履歴ループの囲む面積は応答変位レベルの増加とともに減少する傾向にある。
- (2) 減衰力 $D(\dot{x})$ の項は応答速度 $\dot{x}$ に関する1価関数となり, 線形から離れていく程度を表わすパラメータ ε を用いて,

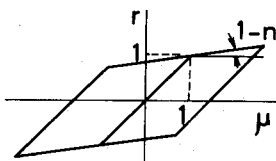
$$D = C(\dot{x} + \varepsilon \dot{x}^3) \quad \text{----- (1)}$$
 のように表わすことができる。ここに, C : 減衰係数 である。
- (3) 減衰力の非線形の程度を表わすパラメータ ε は加振振動数の低い領域において大きい値をとる。

3. bi-linear 型履歴復元力特性と3次曲線型減衰力特性を持つ振動系の等価線形化

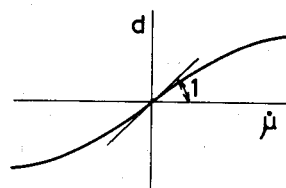
履歴復元力 $r(\mu, n, t)$ として本研究では簡単のために bi-linear 系を採用した。また非線形減衰力を 2ε で除した値

$d(\dot{\mu}, \varepsilon, t)$ として2. で述べた3次曲線型を用いた。すなわち,

$$d(\dot{\mu}, \varepsilon, t) = \dot{\mu} + \varepsilon \dot{\mu}^3 \quad \text{----- (2)}$$



Bi-linear Restoring Force



Nonlinear Damping Force

従って対象とする1自由度振動系の変位と時間に関する運動方程式は次式のようになる。

$$\ddot{u} + 2h \cdot d(\dot{u}, \varepsilon, t) + \gamma(\mu, n, t) = f(t) \quad \text{-----}(3)$$

ここに, μ : ductility factor, $\cdot$ は無次元時間 t に関する微分, h : 微小振動時の減衰定数, n : 弾塑性傾斜率, $f(t)$: 外力。

振動系の等価線形化は, ① 局所的な(1周期間の)時間平均で履歴復元力と非線形減衰力を応答変位およびその速度の線形結合の関数として表現し, ② 関数中の係数に含まれる応答変位および応答速度の振幅パラメータを極値振幅確率密度関数を用いて空間平均する, の手法で行なう。

① 式(3)と固有円振動数 ω_0 , 減衰定数 h_0 を用いて次式のような線形系に書き改める。

$$\ddot{u} + 2h_0 \dot{u} + \omega_0^2 u = f(t) \quad \text{-----}(4)$$

式(3)と式(4)の差として次式のように与えられる2乗誤差 I を履歴復元力特性・非線形減衰特性1サイクルに要する時間 t_p で最小ならしめる規範で h_0, ω_0 を求める。

$$I(h_0, \omega_0) = \int_t^{t+t_p} \{2h \cdot d(\dot{u}, \varepsilon, t) + \gamma(\mu, n, t) - 2h_0 \dot{u} - \omega_0^2 u\}^2 dt \quad \text{-----}(5)$$

式(5)において, 応答 u は t_p 時間において振幅 μ_0 , 円振動数 ω_0 , 位相差 ϕ が一定な調和波, すな

$$u = \mu_0(t) \cos\{\omega_0(t) \cdot t + \phi(t)\} \quad \text{-----}(6)$$

であるとし, 式(5)の最小化条件 $\partial I / \partial \omega_0^2 = 0$, $\partial I / \partial h_0 = 0$ から, h_0, ω_0^2 として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} h_0 &= h \left(1 + \varepsilon \frac{3}{4} \mu_0^2 \omega_0^2\right) + \frac{2n(\mu_0 - 1)}{\mu_0^2 \omega_0 \pi} \\ \omega_0^2 &= \frac{1}{\pi} \left\{ (1-n)\pi + n \cos^{-1} \left(1 - \frac{2}{\mu_0}\right) - \frac{2n}{\mu_0} \left(1 - \frac{2}{\mu_0}\right) \cdot \sqrt{\mu_0 - 1} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \text{-----}(7)$$

式(7)から次のようなことがわかる。(1) 減衰定数 h_0 は, 振幅 μ_0 が与えられれば減衰力 $d(\dot{u}, \varepsilon, t)$ と復元力 $\gamma(\mu, n, t)$ の両者の諸係数を用いて求められる。他方固有振動数 ω_0 は復元力のみに関連し, 減衰力の形状には陰にしか関係しない。(2) 上式において $\varepsilon = 0$, すなわち線形の減衰力を対象とする場合には, 上式の値は従来から求められている値と一致するので, 上式(7)は従来の等価線形化の非線形減衰力へのスムーズな拡張であるということができる。

② 式(7)として係数 h_0, ω_0 が与えられる式(4)なる線形系を, 等価固有円振動数 ω_{eq} , 等価減衰定数 h_{eq} を用いて次式のような等価線形系に書き改める。

$$\ddot{u} + 2h_{eq} \dot{u} + \omega_{eq}^2 u = f(t) \quad \text{-----}(8)$$

式(4)と式(8)の差として次式のように与えられる2乗誤差 J を最小ならしめる規範で h_{eq}, ω_{eq} を求

$$J(h_{eq}, \omega_{eq}) = \int_0^\infty \{2h_0(\mu_0, \omega_0) \cdot \dot{u} + \omega_0^2(\mu_0) \cdot u - 2h_{eq} \dot{u} - \omega_{eq}^2 u\}^2 p(\mu_0, t) d\mu_0 \quad \text{-----}(9)$$

式(9)の最小化条件 $\partial J / \partial \omega_{eq}^2 = 0$, $\partial J / \partial h_{eq} = 0$ から h_{eq}, ω_{eq}^2 は,

$$h_{eq} = \int_0^\infty h_0(\mu_0, \omega_0) p(\mu_0, t) d\mu_0, \quad \omega_{eq}^2 = \int_0^\infty \omega_0^2(\mu_0) p(\mu_0, t) d\mu_0 \quad \text{-----}(10)$$

で与えられる。ここに $p(\mu_0, t)$ は時刻 t における極値振幅確率密度関数である。

最後に有意識な討議を行なった金沢大学大学院生柴田 聡君に感謝の意を表する。

参考文献 1) 小堀南井: 京大防災年報第10号A, 1967. 2) 後藤家村: 第12回地震工学研究発表会, 3) 浅家俊雄: 第32回年次講演会。